www.Mech-88.blogfa.com

Subject : طراحی مکانیزم ها Date : 138 / /

مکانیزم : مکانیزم دستگاهی است مکانیکی برای انتقال (تبدیل یا تغییر) حرکتها و نیروها ، یا هدایت نقاط یک عضو یا هدایت یک عضو در مواضع یا مسیر معین

یک مکانیزم تشکیل شده است از قسمتهای بهم متصل متحرکی (بنام اعضاء) که نوع حرکت آنها توسط نوع اتصال اعضاء به یکدیگر (بنام مفصل یا زوج اتصال) مشخص می شود. یک عضو همیشه ثابت (پایه) بوده و حداقل تعداد اعضا و مفاصل سه عدد است.

سنتز مکانیزم : ابداع و خلق یک طرح با داشتن مشخصات طرح

آنالیز مکانیزم : آنالیز کردن (تجزیه ، تحلیل) مکانیزم مانند آنالیز سرعت

سنتز و آنالیز یک سیکل را تشکیل می دهند.

سنتز مکانیزم
- ۱- سنتز نوع : مشخص کردن نوع مکانیزم (در درس روشهای طراحی مهندسی (۱))
- ۲- سنتز تعدادی : (درجه آزادی ، نوع اتصال ، تعداد عضوها و ...)
- ۳- سنتز ابعادی : مشخص کردن ابعاد مکانیزم (مانند مشخص کردن ابعاد لینکهای مکانیزم ۴ میله ای)

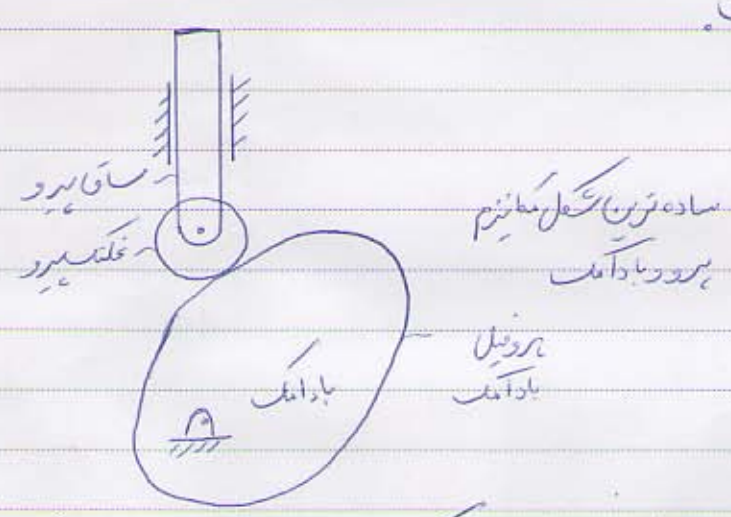
با توجه به تعریف مکانیزم و سنتز نوع میتوان مکانیزم ها را به یازده نوع مکانیزم اصلی (مشابه دارند) تقسیم بندی نمود.

۱-	مکانیزم های میله ای	Linkages
۲-	" اهرمی	cams
۳-	" چرخ دنده ای	Gears
۴-	" پیچشی	screw gearing
۵-	عضو کششی	Tension medium
۶-	" چرخ اصطکاکی	Friction gears
۷-	" عضو فشاری	pressure medium gearing
۸-	" ترکیبی	combined gearing

۹- مبدلهای دوران و گشتاور با قابلیت تنظیم بدون وقفه نسبت به یکدیگر

مقدمه: بادامک ها (Cams) یکی از اجزای مهم ماشین آلات صنعتی هستند به آنها می‌توان حرکات بی قاعده و غیرمعمول را امکان پذیر نمود؛ کاری که به کمک سایر مکانیزم ها نظیر چهار میله ای به سختی امکان پذیر است. بادامک در اجزای انواع ماشین ها و دستگاه ها از جمله ماشین ابزار، موتورهای احتراق داخلی، لوازم خانگی، اسباب بازی ها و ... کاربرد دارند.

در یک مکانیزم پیرو و بادامک، که از نوع مکانیزم تماسی است، به کمک سطح با شیار شکل داده شده ای (پروفیل بادامک) یک حرکت مشخص و مورد نظری به پیرو تحمیل می شود. معمولاً بادامک به عنوان ورودی (محرک) با سرعت ثابت توسط یک موتور حرکت داده می شود و پیرو (Follower) بر روی سطح بادامک یا درون شیار آن دارای حرکت لغزشی یا غلتشی است.



تصمیم گیری در مورد استفاده از سیستم (مکانیزم) پیرو و بادامک در طراحی حرکت ماشین ها و مکانیزم ها از قاعده و اصول مشخصی تبعیت می کند بلکه بر اساس تجربه و خلاقیت طراح مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان یک اصل کلی، یکی از انتخاب های قابل قبول برای حرکت های پیچیده با تعریف مشخص مکانیزم پیرو و بادامک است.

محاسن: سادگی، هزینه پایین، قابلیت اعتماد بالا، فضای اندک مورد نیاز، نگهداری آسان از جمله محاسن مکانیزم پیرو و بادامک است.

www.Mech-88.blogfa.com

معرفی مکانیزم های پیرو و بادامک :

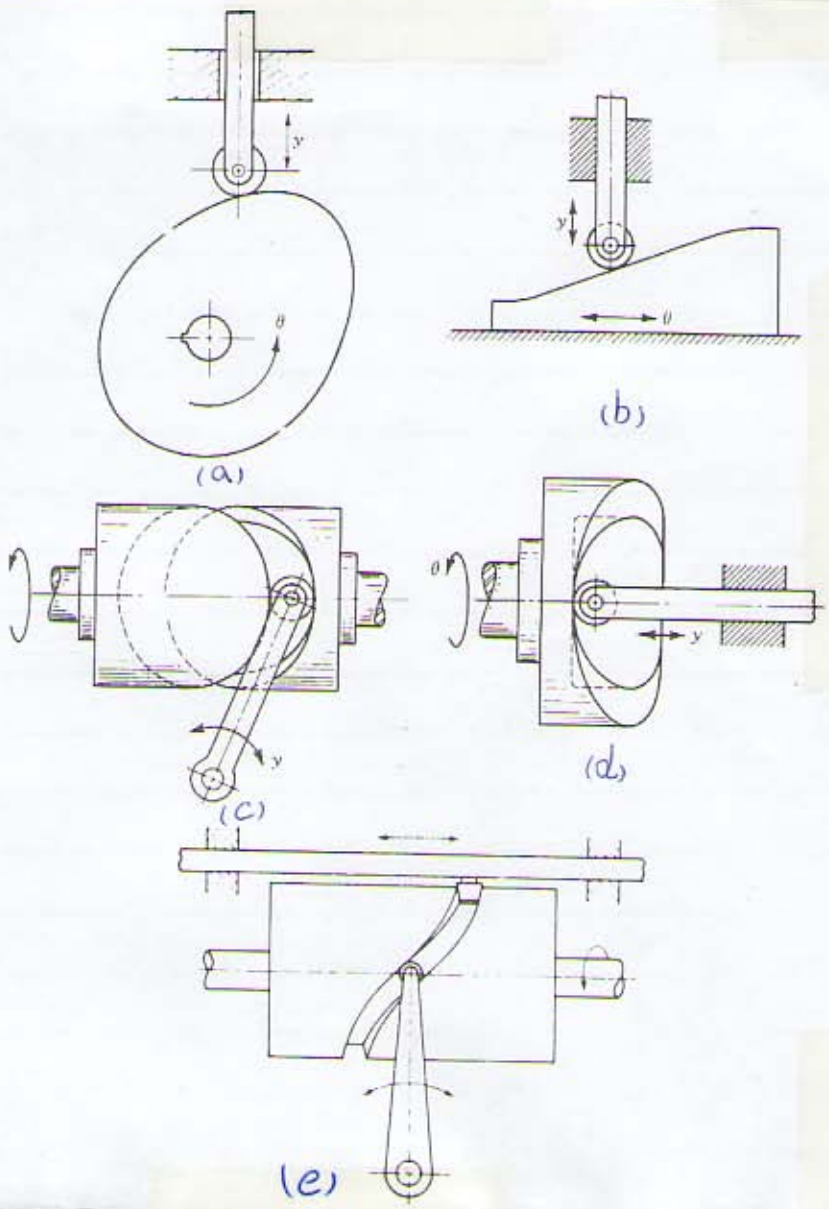
الف :

دسته بندی مکانیزم های بادامکی می تواند براساس شکل و حرکت بادامک و پیرو صورت پذیرد.

الف - تقسیم بندی از نظر شکل بادامک :

بادامک معمولاً به شکل دیسک یا سیلندر هستند ولی شکل های دیگر بادامک نیز وجود دارد، بادامک های دیسکی (Radial) رواج غالب دارد.

(a) بادامک دیسکی با صفحه ای ، (b) بادامک رفت و برگشتی (c، e) بادامک استوانه ای



www.Mech-88.blogfa.com

ب- تقسیم بندی از نظر شکل پیرو:

حرکت پیرو می‌تواند به صورت رفت و برگشتی (Reciprocating Follower) و یا دورانی (oscillating or Pivoted Follower) باشد. در بادامک رفت و برگشتی اگر امتداد مسیر حرکت پیرو از مفصل دورانی بادامک عبور کند آن را بدون خارج از مرکز (In-line) و در غیر اینصورت دارای خارج از مرکز (offset Type) می‌گویند.

a: پیرو سوزنی Knife-Edge

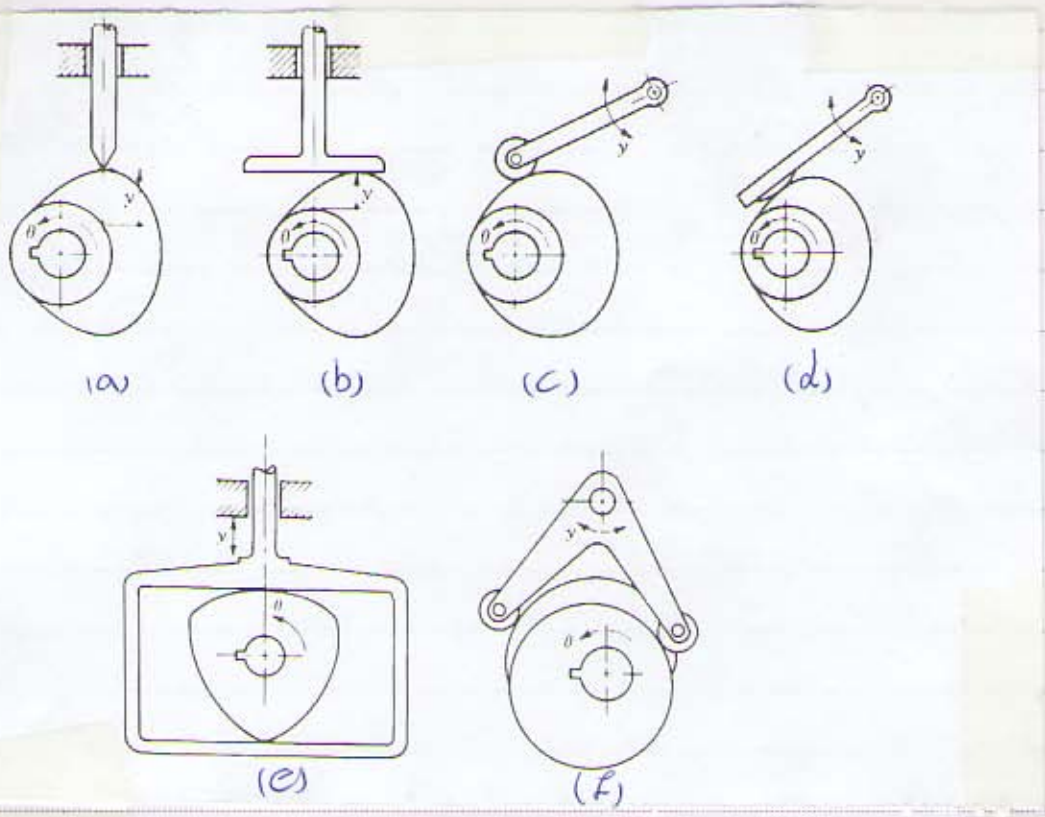
b: پیرو تخت Flat-Faced

c: پیرو غلتکی Roller-Type

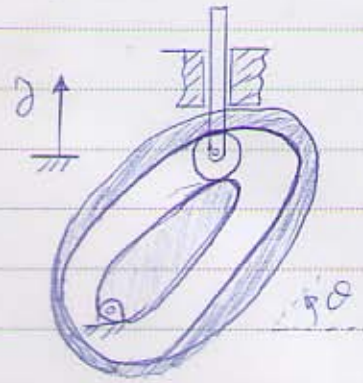
d: کروی

(جهت سرعت بالا و بار استهلاک الزامی است)

e: بادامک با فرض ثابت



حرکت رفت پیرو معمولاً توسط بادامک صورت می‌گیرد و برگشت آن توسط نیروی فنر، وزن و ...
صورت می‌گیرد. در بعضی از بادامک‌ها حرکت برگشت نیز توسط بادامک انجام می‌گیرد. (یک بادامک با فرض ثابت
دارای این خصوصیت است)



translating
Positive-return follower

منحنی تغییرمکان حرکت پیرو:

چگونگی حرکت پیرو در تحلیل مکانیزم پیرو و بادامک و نیز طراحی پروفیل بادامک بسیار مهم است.
رسم دیاگرامی که تغییرمکان پیرو را برحسب تغییرمکان زاویه‌ای بادامک در یک سیکل بیان نماید جهت طراحی
پروفیل بادامک ضروری است. محور y: تغییرمکان پیرو و محور x به عنوان محور زاویه دوران
بادامک خواهد بود.

سرعت پیرو $v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\omega \rightarrow \dot{y} = y'\omega$

با فرض $\omega = ac$ $\ddot{y} = y''\omega^2$

بنابراین میزان y' و y'' تا بیانگر سرعت و شتاب پیرو دانست

www.Mech-88.blogfa.com

بنابراین به کمک مشتق‌گیری نسبت به زمان می‌توان منحنی‌های سرعت و شتاب هیدرو را نیز به دست آورد.

شتاب هیدرو از نظر نیروهای اینرسی که به ارتعاشات، پایش و تنش‌های بالا منجر می‌شوند و به خصوص در بادامک‌های با سرعت بالا اهمیت دارد. مشتق شتاب نسبت به زمان (Jerk, Pulse) معیاری برای معرفی نرخ زمانی تغییرات نیروی اینرسی و در نتیجه معرفی خصوصیات ضربه‌ای بارهای وارده است. تجربه نشان داده است که اگر jerk در بخشی از سیکل حرکت، نامحدود گردد، به ارتعاشات هیدرو منجر گشته و کاهش شدید عمر بادامک را به دنبال دارد.

از این رو، چگونگی حرکت هیدرو به دیاگرام تغییرمکان هیدرو کاملاً وابسته است و مبنای طراحی پروفیل بادامک قرار می‌گیرد.

انواع حرکت هیدرو:

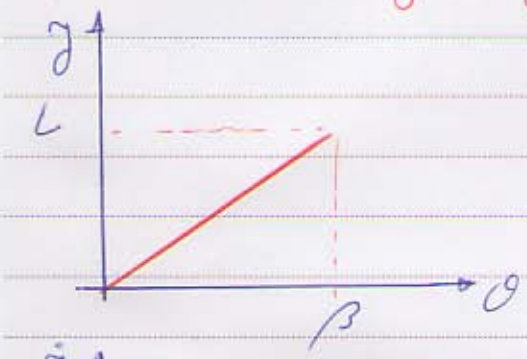
انواع حرکت هیدرو نسبت به نظر طراح در مسئله مورد مطالعه‌اش، از هیچ محدودیتی برخوردار نیست و به این ترتیب پروفیل‌های نامحدودی برای بادامک قابل تصور است. با این وجود، در مکانیزم‌هایی که حرکت بادامک به کندی صورت می‌گیرد معمولاً ترکیبی از بخش‌های خطی (خطوط مستقیم) و قوس (قسمت‌های مارپیچ) ارضا کننده خواهد بود.

در کاربردهای سرعت بالا، تأمین یک تغییرمکان مشخص برای هیدرو، در لحظات مختلف کافی نیست بلکه ضرورت دستیابی به تغییرمکان مورد نظر با توجه به عدم ایجاد سروصدا، ارتعاشات و تنش‌های اعمالی مطرح می‌گردد.

همچنین ممکن است که هیدرو به سوی شناور شدن تمایل یابد یعنی از حالت تماس با بادامک در طول یک سیکل کامل باز ماند.

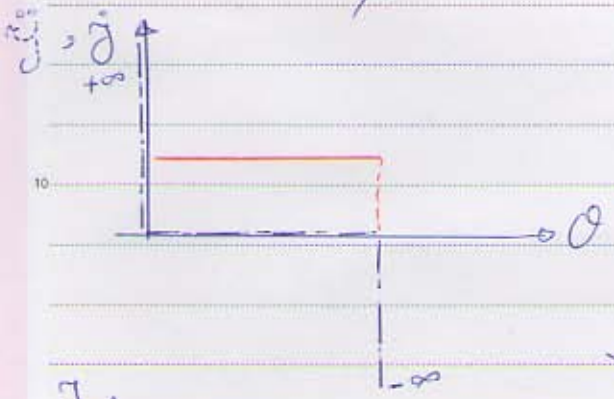
www.Mech-88.blogfa.com

الف - حرکت خطی (خط مستقیم) سرعت یکنواخت (uniform velocity, straight line)



$$y = \frac{L}{\beta}\theta \qquad 0<\theta<\beta$$

$$\dot{y} = \frac{L}{\beta}\omega$$



$$\begin{cases} \ddot{y} = 0 & 0<\theta<\beta \\ \ddot{y} = +\infty & \theta = 0 \\ \ddot{y} = -\infty & \theta = \beta \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که در نمودار شتاب، در ابتدا و انتها مقدار شتاب نامحدود می‌شود. در این نقاط به علت زیاد بودن a، نیروی اینرسی افزایش زیادی یافته و به بار یک آسیب می‌رساند. برای رفع این نقص می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

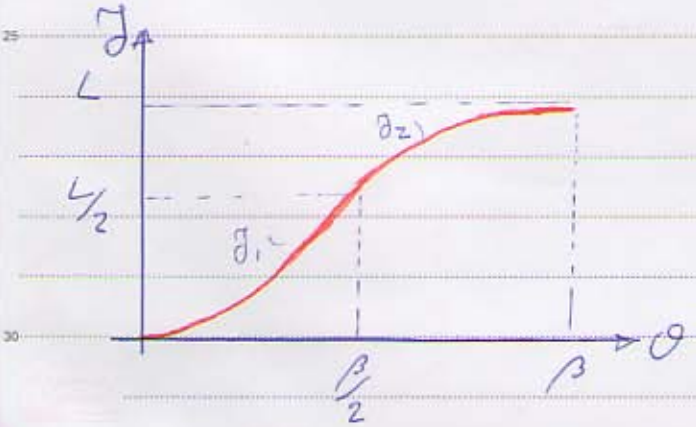
برای هر هیز از این نقیصه سراغ حرکت سهمی می‌رویم

ب - حرکت سهمی:

حرکت سهمی شکل که حرکت شتاب یکنواخت (ثابت) را به دنبال دارد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

در دیاگرام تغییر مکان، کل جابجایی به دو قسمت مساوی تقسیم شده و در قسمت اول یک حرکت با شتاب افزاینده و

در قسمت دوم با شتاب کاهنده در نظر گرفته می‌شود



$$y_1 = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2 \qquad 0<\theta<\beta/2$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad @ \begin{cases} \theta = \beta/2 \\ y = L/2 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_0 = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0$$

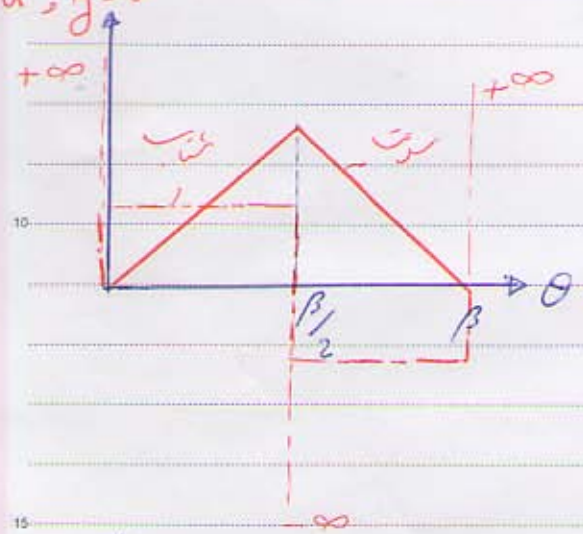
$$@ \Rightarrow L/2 = C_2 \tfrac{1}{4}\beta^2 \Rightarrow C_2 = \frac{2L}{\beta^2}$$

$$y_1 = \frac{2L}{\beta^2}\theta^2 \qquad 0<\theta<\beta/2$$

$$y_2 = C_0' + C_1'\theta + C_2'\theta^2 \qquad \beta/2<\theta<\beta \qquad \begin{cases}\theta=\beta/2\\ y_2=L/2\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta=\beta/2\\ y_2'=y_1'=\frac{2L}{\beta}\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta=\beta\\ y=L\end{cases}$$

$$y_2 = L\left[1-2\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$

$y''=a$, $y'=v$



www.Mech-88.blogfa.com

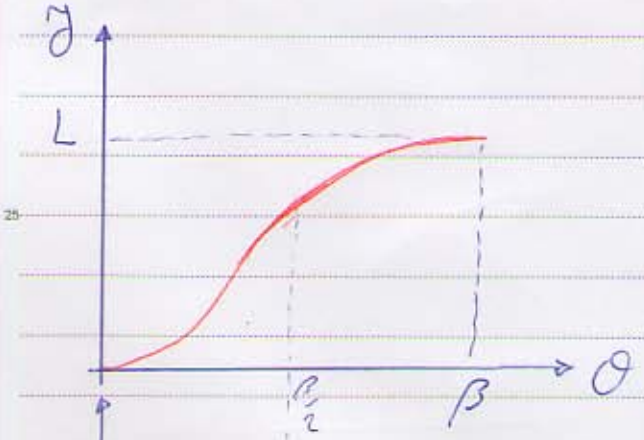
در اینجا در ابتدا و انتها نیروی اینرسی زیادی (شدید) وجود ندارد ولی ضربه‌ی شدیدی وجود خواهد داشت

jerk $\quad j = \frac{da}{dt}$ ضربه متناسب با تغییرات شتاب بر واحد زمان است و چون برای dt وجود دارد ($t=0$) da وجود دارد لذا j به سمت $+\infty$ می‌رود و ایجاد ضربه می‌کند.

$$y = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2 + C_3\theta^3 + C_4\theta^4 + C_5\theta^5$$

تمرین: مطلوبست تعیین ضرایب منحنی رفت کامل درجه 5 برای حرکت هر دو سر θ

بررسی حرکت‌های هارمونیک:



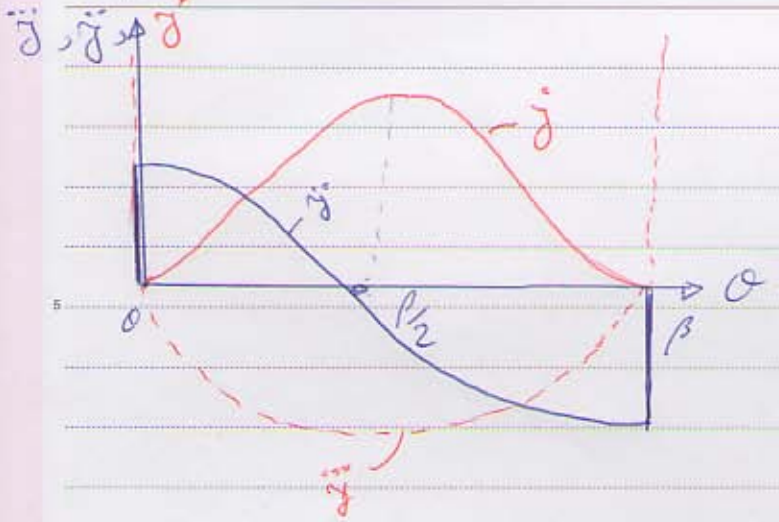
$$y = \frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$\dot{y} = \frac{\pi}{2}\frac{L\omega}{\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

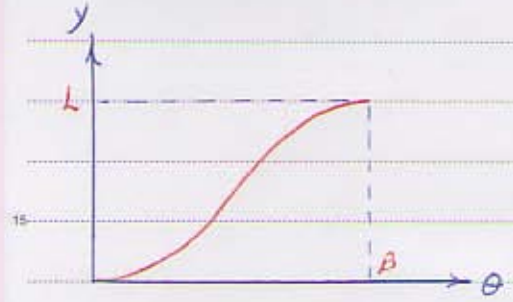
$$\ddot{y} = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

$$\dddot{y} = -\frac{L}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

کلیه شرایط $\begin{cases}\theta=0 \Rightarrow y=\dot{y}=0\\ \theta=\beta \Rightarrow y=L,\ \dot{y}=0\end{cases}$ ارضا می‌شود



بررسی حرکت سیکلوئیدی:

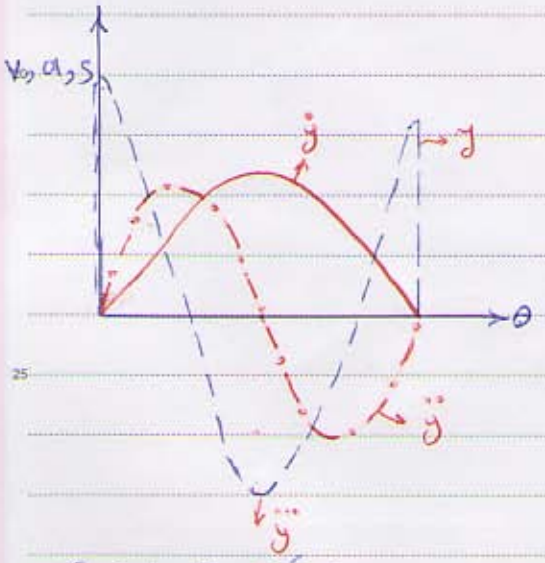


روابط منحنی ع:

$$y = L\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

شرایط مرزی $\begin{cases} v = 0 \\ y = 0 \,,\, \dot{y} = 0 \end{cases}$

$$\dot{y} = \frac{L\omega}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$



$$\begin{cases} \theta = \beta \\ y = L \,,\, \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{y} = 2L\pi\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$$

$$\dddot{y} = 4\pi^2 L\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^3 \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}$$

تمرین ۱: معادله کثیرالجمله درجه ۳ برای حرکت رفت کامل:

$$\begin{cases} \theta = 0 : \; y = y' = 0 \\ \theta = \beta : \; y = L,\; y' = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{3L\theta^2}{\beta^2} - \frac{2L\theta^3}{\beta^3}$$

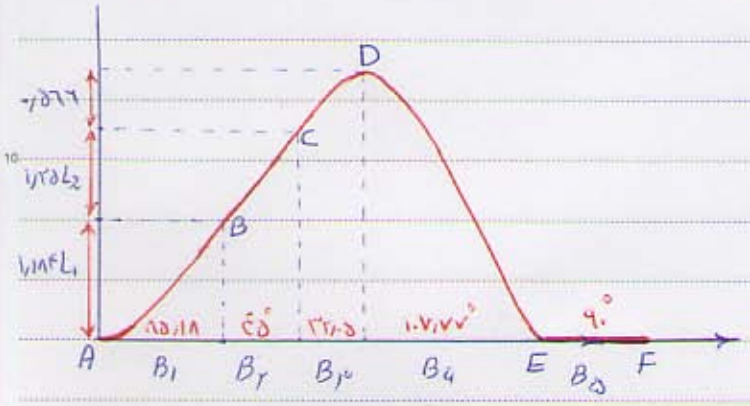
تمرین ۲: معادله کثیرالجمله درجه 5 برای حرکت رفت کامل:

$$\begin{cases} \theta = 0 : \; y = y' = y'' = 0 \\ \theta = \beta : \; y = L,\; y' = y'' = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{10L}{\beta^3}\theta^3 - \frac{15L}{\beta^4}\theta^4 + \frac{6L}{\beta^5}\theta^5$$

مثال: یک بادامک دیسکی با پیرو رفت و برگشتی قرار است با سرعت زاویه‌ای ثابت 150 rpm دور بر دقیقه دوران کند. پیرو از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب می‌گیرد (حرکت شتابدار) و به یک حرکت یکنواخت با سرعت خطی 28 inch/s می‌رسد در حالیکه بالابر سرعت لغزشی برابر با 1.25" ایجاد می‌کند و سپس با شتاب کند شونده‌ای به بالاترین نقطه از حرکت خود می‌رسد سپس حرکت برگشت را انجام می‌دهد و به قسمت سکون می‌رسد مدت سکون ۱ ثانیه می‌باشد چنانچه کل لغزش پیرو "3 باشد مطلوبست تعیین منحنی کامل جابجایی پیرو و رسم آن.

حل:



$L = L_1 + L_2 + L_3 = 3''$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 360^\circ$

برای AB:

باید $y'=0$ چون از سکون شروع به حرکت کرده است و $y''_A=0$ و حرکت شتابدار باشد و $y''_B=0$ چون به یک حرکت یکنواخت می‌رسد.

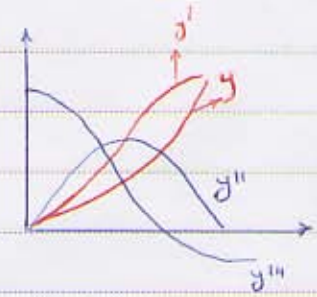
انتخاب منحنی
شکل: 5-22-a
Eq: 5-28

$$y = L_1\left(\frac{\theta}{\beta_2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right)$$

$$y' = \frac{L_1}{\beta_1}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right)$$

$$y'' = \frac{\pi L_2}{\beta_1^2}\sin\frac{\pi\theta}{\beta_2}$$

$$y''' = \frac{\pi^2 L_2}{\beta_1^3}\cos\frac{\pi\theta}{\beta_1}$$



برای BC:

سرعت ثابت و شتاب صفر $\Rightarrow y = A + C\theta$

شرایط مرزی $\begin{cases} y=0 \Rightarrow A=0 \\ y=\beta_2 \Rightarrow y=L_2 \Rightarrow L_2 = C\beta_2 \Rightarrow C=\frac{L}{\beta} \end{cases}$

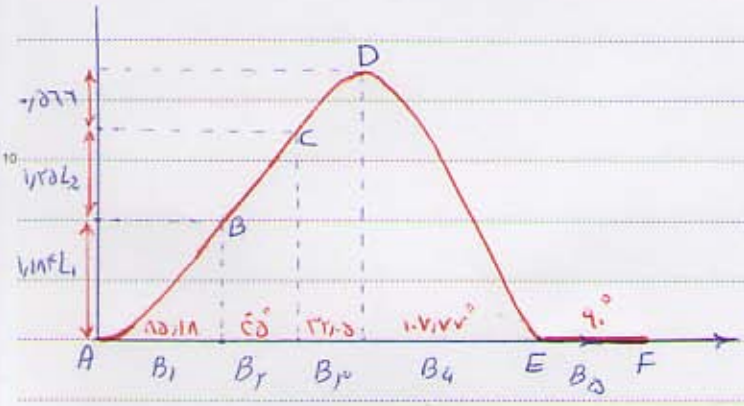
$$y = \left(\frac{L_2}{\beta_2}\right)\theta \Rightarrow y = L_2\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right) \Rightarrow y' = \frac{L_2}{\beta_2}, \quad y''=0$$

$$tg\,\theta = \frac{L_2}{\beta_2} = y' = \frac{\dot{y}}{\omega} \Rightarrow \frac{1.25''}{\beta_2} = \frac{28}{157} \Rightarrow \frac{1.25}{\beta_2} = 1.59$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 0.785\ rad \Rightarrow \boxed{\beta_2 = 45^\circ}$$

مثال: یک بادامک دیسکی با پیرو رفت و برگشتی قرار است با سرعت زاویه‌ای ثابت 150 rpm دور بر دقیقه دوران کند. پیرو از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب می‌گیرد (حرکت شتابدار) و به یک حرکت یکنواخت با سرعت خطی 28 inch/s می‌رسد در حالیکه با این سرعت لغزشی برابر با "1.25 ایجاد می‌کند و سپس با شتاب کند شونده‌ای به بالاترین نقطه از حرکت خود می‌رسد سپس حرکت برگشت را انجام می‌دهد و به قسمت سکون می‌رسد مدت سکون 1 ثانیه می‌باشد چنانچه کل لغزش پیرو "3 باشد مطلوبست تعیین منحنی کامل جابجایی پیرو و رسم آن.

حل:



$L = L_1 + L_2 + L_3 = 3''$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 360^\circ$

برای AB:

باید $y' = 0$ چون از سکون شروع به حرکت کرده است و $y''_A = 0$ و حرکت شتابدار باشد و $y''_B = 0$ چون به یک حرکت یکنواخت می‌رسد.

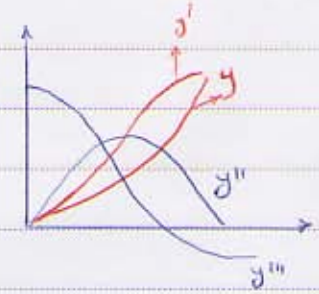
انتخاب منحنی
شکل: 5-22-a
Eq: 5-28

$$y = L_1\left(\frac{\theta}{\beta_2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right)$$

$$y' = \frac{L_1}{\beta_1}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right)$$

$$y'' = \frac{\pi L_2}{\beta_1^2}\sin\frac{\pi\theta}{\beta_2}$$

$$y''' = \frac{\pi^2 L_2}{\beta_1^3}\cos\frac{\pi\theta}{\beta_1}$$



برای BC:

سرعت ثابت و شتاب صفر $\Rightarrow y = A + C\theta$

شرایط مرزی $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y = \beta_2 \Rightarrow y = L_2 \Rightarrow L_2 = C\beta_2 \Rightarrow C = \frac{L}{\beta} \end{cases}$

$$y = \left(\frac{L_2}{\beta_2}\right)\theta \Rightarrow y = L_2\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right) \Rightarrow y' = \frac{L_2}{\beta_2}, \quad y'' = 0$$

$$tg\,\theta = \frac{L_2}{\beta_2} = y' = \frac{y^\circ}{\omega} \Rightarrow \frac{1.25''}{\beta_2} = \frac{28}{15.7} \Rightarrow \frac{1.25}{\beta_2} = 1.79$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 0.758\ rad \Rightarrow \boxed{\beta_2 = 43^\circ}$$

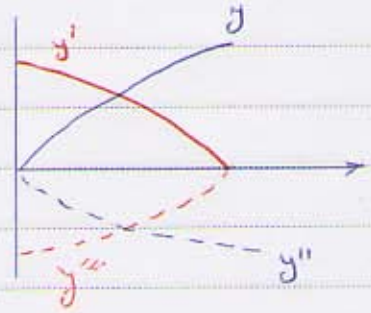
برای CD : حرکت با شتاب کند شونده Fig: 5-20-b
Eq: 5-25

$$y = L_3 \sin \frac{\pi\theta}{2B_3}$$

$$y' = \frac{\pi L_3}{2B_3} \cos \frac{\pi\theta}{2B_3}$$

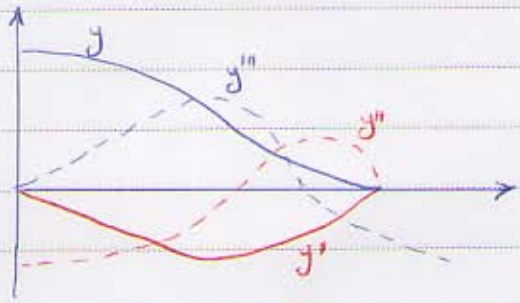
$$y'' = -\frac{\pi^2 L_3}{4B_3^2} \sin \frac{\pi\theta}{2B_3}$$

$$y''' = -\frac{\pi^3 L_3}{8B_3^3} \cos \frac{\pi\theta}{2B_3}$$



برای DE :

Fig. 5-28
Eq: 5-36



$$y = L\left[1.\ldots - 2.4241\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 2.7805\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 3.1706\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6 - 6.8779\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^7 + 2.5609\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^8\right]$$

$$y' = -\frac{L}{\beta}\left[5.2480\frac{\theta}{\beta} - 13.9027\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 - 19.0224\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 48.1457\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6 - 20.4870\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^7\right]$$

$$y'' = -\frac{L}{\beta^2}\left[5.2480 - 55.4110\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 95.118\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 288.8739\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 - 143.4132\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6\right]$$

$$y''' = \frac{L}{\beta^3}\left[144.8433\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 380.4732\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - \ldots\ldots\right]$$

برای EF :

$t = 0.1\ s$ $\beta_5 = \omega \cdot t = 15.7 \times 0.1 = 1.57\ rad \Rightarrow \boxed{\beta_5 = 90^\circ}$

$\omega = 15.7\ rad/s$

$y'_{AB}\big|_{\theta=\beta_1} = y'_{BC}\big|_{\theta=0} \Rightarrow \frac{2L_1}{\beta_1} = 1.59 \Rightarrow L_1 - 0.795\beta_1 = 0$

$y'_{BC} = y'_{CD}\big|_{\theta=0} \Rightarrow \frac{\pi L_3}{2\beta_3} = 1.59 \Rightarrow L_3 - 1.013\beta_3 = 0$

$y''_{CD}\big|_{\theta=\beta_3} = y''_{DE}\big|_{\theta=0} \Rightarrow -\frac{\pi^2 L_3}{4\beta_3^2} = -\frac{L_4}{\beta_4^2} \times 5.2480 \Rightarrow 4.112\beta_3^2 = L_3\beta_4^2$

$$\begin{cases} L_1 + L_3 = 1{,}75'' \\ B_1 + B_3 + B_4 = 225^\circ \\ L_1 - 0{,}7950\, B_1 = 0 \\ L_3 - 1{,}013\, B_3 = 0 \\ 4{,}412\, B_3^2 = L_3 B_4^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{۵ مجهول}]{\text{۵ معادله و}}$$

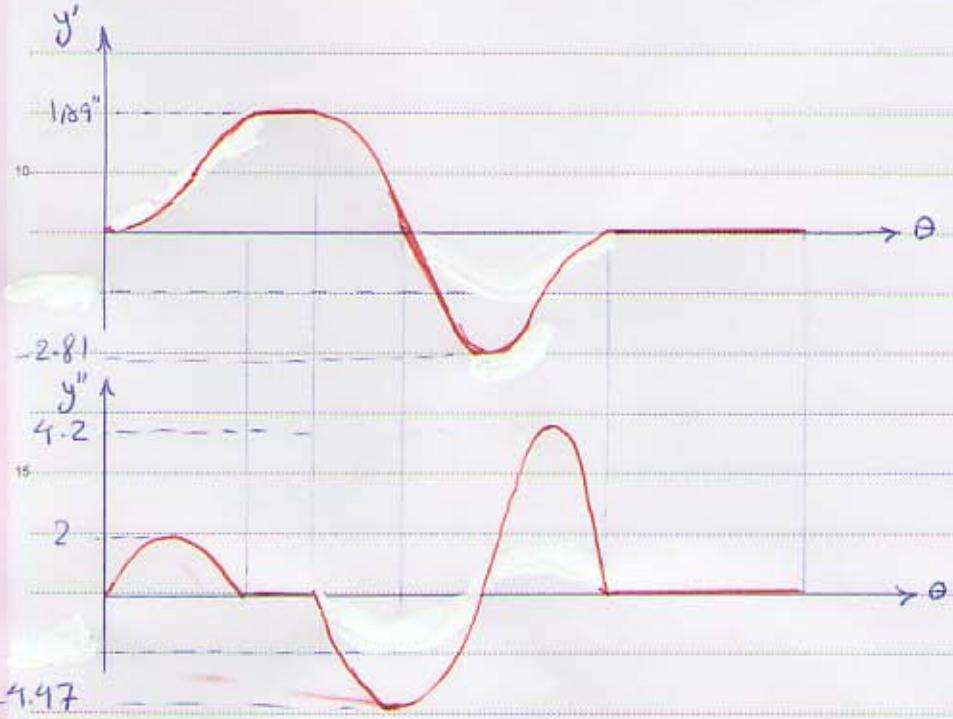
$L_1 = 1{,}184$ inch $\quad B_1 = 85{,}18^\circ$

$L_2 = 1{,}25''$ $\quad B_2 = 45^\circ$

$L_3 = 0{,}544''$ $\quad B_3 = 32{,}05^\circ$

$L_4 = 3''$ $\quad B_4 = 107{,}77^\circ$

$L_5 = 0$ $\quad B_5 = 90^\circ$



$S = y'_{max} - y'_{min} \Rightarrow S = 1{,}89 + 2{,}81 \Rightarrow S \geq 4{,}4$ inch

$f_{min} = 0{,}25''$

$R_0 > f_{min} - y - y'' \Rightarrow R_0 > 0{,}25'' - 3'' + 4{,}47$

$\Rightarrow R_0 > 1{,}72'' \Rightarrow R_0 \simeq 2'' = R_b$

$R_b = 0{,}4''$

طراحی پروفیل بادامک به روش ترسیمی

تعاریف:

دایره اولیه: دایره‌ای به مرکز محور دوران بادامک است که با کمترین شعاع بر منحنی بادامک مماس است و به R_0 نمایش داده می‌شود.
Prime Circle

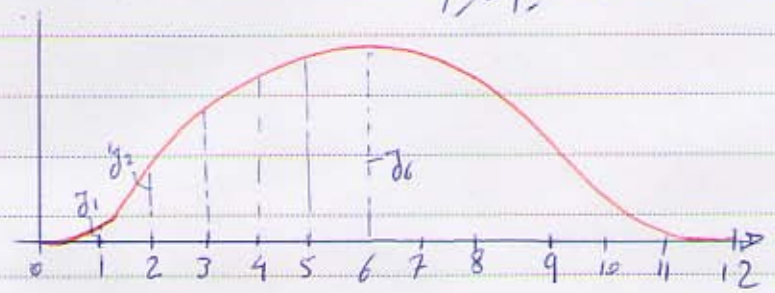
دایره مبنا: دایره‌ای به مرکز محور بادامک است که با کمترین شعاع مماس بر پروفیل بادامک باشد.
Base circle

برای طراحی همیشه به دایره اولیه سروکار داریم.

طراحی پروفیل بادامک برای نیروی غلتکی

منحنی تغییر مکان پیرو و شعاع دایره اولیه R_0 و شعاع غلتک پیرو R_r مفروض است.

۱- منحنی تغییر مکان $(y-\theta)$ را به (مثلاً) 12 قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.



(در مکان‌هایی که تغییر شدت است تقسیم‌ها ریزتر انجام شود.)

۲- دایره اولیه را رسم نمایید.

۳- برای طراحی از مکانیزم وارون (Inversion) استفاده می‌کنیم. (در بسیاری از موارد طراحی با مکانیزم وارون ساده‌تر است)

۴- خطوط شعاعی از مرکز بادامک، متناظر با قسمت‌ها خطوط قائم در دیاگرام تغییر مکان را رسم می‌کنیم. با فرض آن که حرکت بادامک در جهت عقربه‌های ساعت باشد، شماره‌گذاری این خطوط را بر اساس حرکت معکوس، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد.

۵- تغییر مکان ها y_1 ، y_2 و ... را از روی دیاگرام تغییر مکان به خطوط شعاعی مربوط منتقل می سازیم

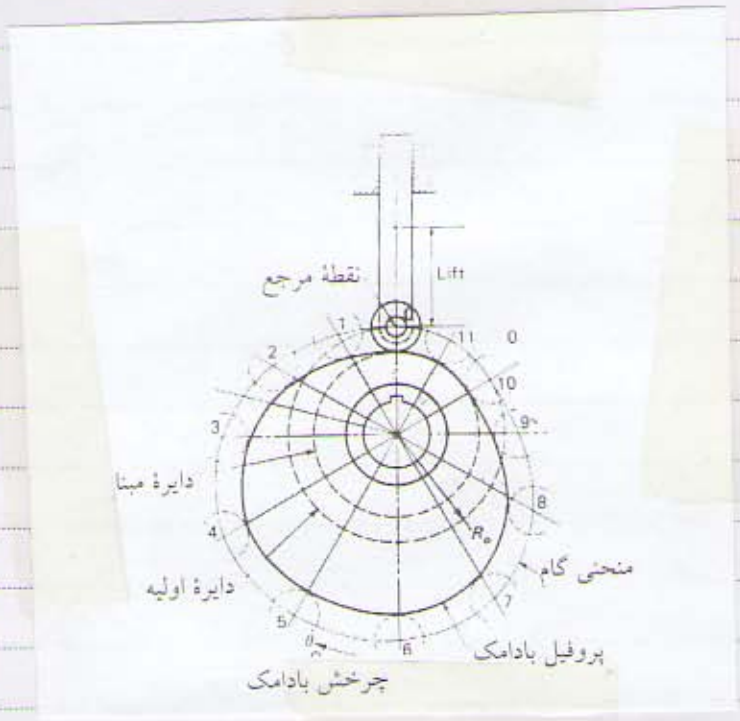
این تغییر مکان ها روی خطوط شعاعی از محل تقاطع دایرهٔ اولیه اندازه گیری می شوند.

۶- شعاع غلتک پیرو را بر روی خطوط شعاعی مذکور در مرکز مشخص شده رسم می نماییم.

۷- یک منحنی هموار، مماس بر غلتک پیرو در وضعیت های مختلف مذکور رسم نمائید. واضح است

هر چه تعداد تقسیمات روی منحنی تغییر مکان بیشتر باشد پروفیل بدست آمده دقیق تر و رسم منحنی هموار

مربوط آسانتر است.



طراحی پروفیل بادامک با پیرو تخت :

منحنی تغییر مکان پیرو $y-\theta$ ، R_o ، طول مت تخت پیرو (d) مفروض است.

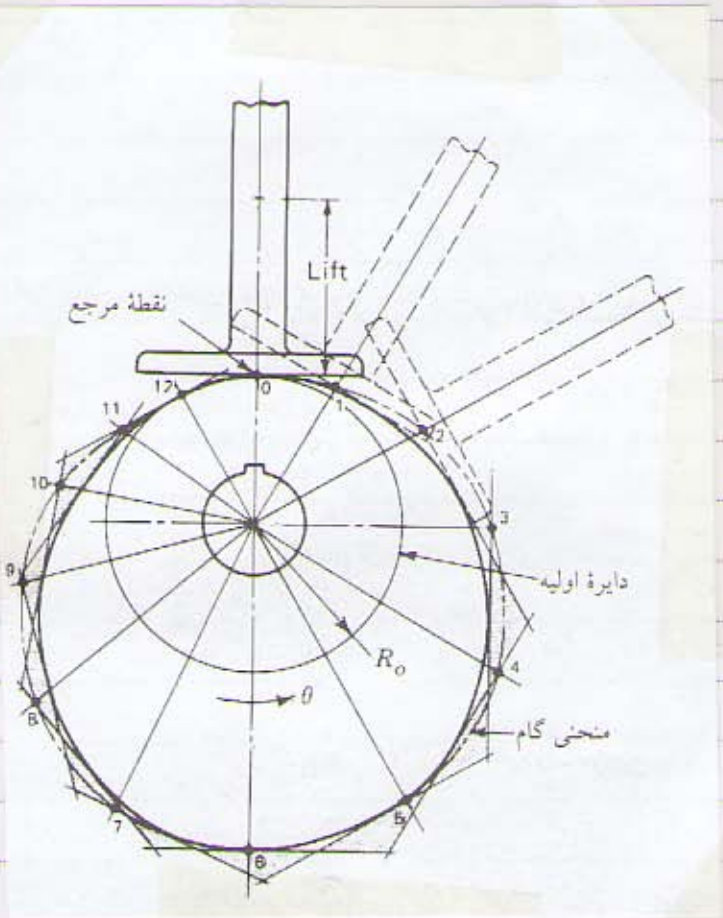
۱- دایرهٔ اولیه را رسم نمائید. (با دایرهٔ مبنا یکی است.)

۲- خطوط شعاعی متناظر با تقسیمات روی دیاگرام تغییر مکان رسم و در جهت عکس دوران بادامک شماره گذاری نمائید.

۳- شعاع (سطح تماس) پیرو را روی خطوط شعاعی مختلف به دنبال تعیین تغییر مکان های مربوطه، با رسم خطوط عمود بر خطوط شعاعی در نقاط تعیین شده، رسم نمائید.

۴- منحنی هموارسی که مماس بر پیرو در وضعیات مختلف رسم می گردد، پروفیل بادامک را مشخص می سازد.

۵-



طراحی پروفیل بادامک برای پیرو با خارج از محور

در این حالت نیز منحنی تغییر مکان $\theta - y$، خارج از محور e، R_0 و R_r مفروض هستند.

۱- دایره اولیه را رسم نمائید.

۲- دایرهٔ خروج از محور را به مرکز دوران بادامک و به شعاع فاصلهٔ آن مرکز تا امتداد حرکت پیرو (یعنی e) رسم نمائید.

۳- دایرهٔ خارج از محور را به تقسیمات متناظر با تقسیمات روی منحنی دیاگرام تغییر مکان تقسیم بندی نمائید.

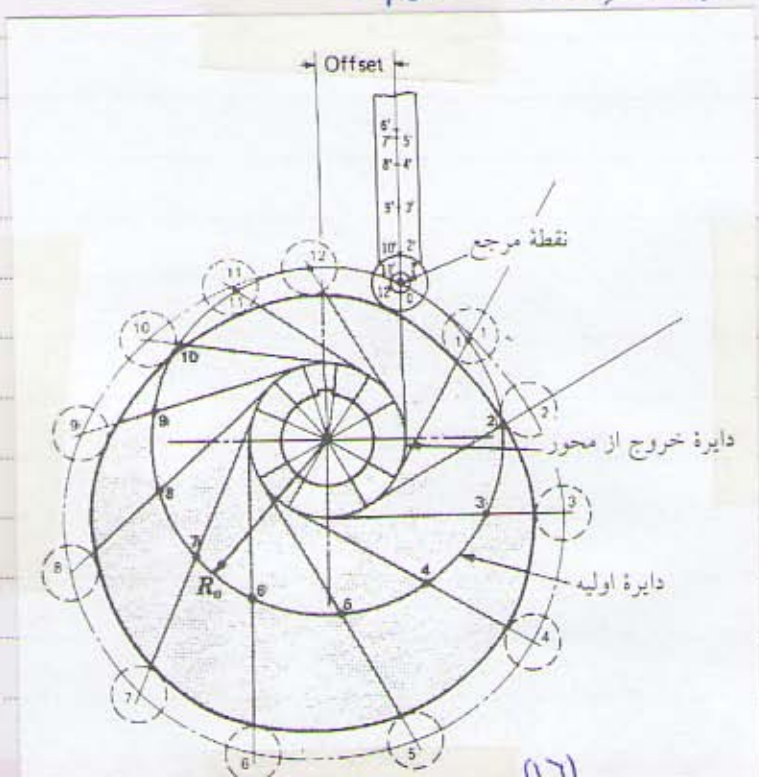
این شماره گذاری عکس دوران بادامک خواهد بود.

۴- در هر یک از نقاط تقسیم دایرهٔ خارج از محور، مماس بر این دایره رسم نمائید تا دایرهٔ اولیه را قطع نمائید.

۵- تغییر مکان های y_1، y_2 و ... را بر روی مماس های متناظر منتقل نمائید. این تغییر مکان ها از محل تقاطع هر مماس با دایره اولیه اندازه گیری می شود تا محل مرکز غلتک مشخص می شود.

۶- مرکز غلتک پیرو را بر روی هر یک از خطوط مماس مذکور رسم نمائید.

۷- منحنی هموار می که مماس بر پیرو را در این موقعیت ها است را رسم نمائید.



Subject : Date : 138 / /

طراحی پروفیل بادامک با پیرو نوسانی :

$\psi(\theta)$ ، R_0 ، R_r ، O_2Q ، L مفروض است.

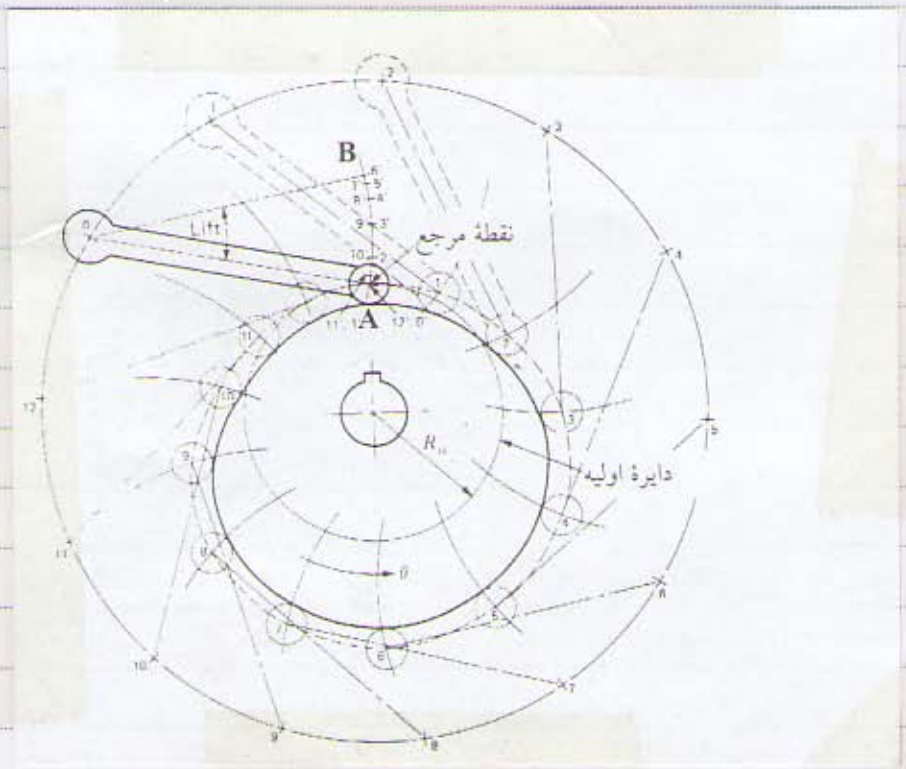
۱- دایره اولیه را رسم نمائید.

۲- نقاط تقسیم را روی دایرهٔ اولیه مطابق با فصل تغییر مکان تعیین نمائید. (علی دوران بادامک)

۳- دایرهٔ مفصل را به مرکز مفصل بادامک و به شعاع اندازه آرم مفصل پیرو رسم نمائید. (شعاع O_2Q)

۴- از هر یک از نقاط مفصل، قوس به شعاع بازو پیرو رسم نمائید.

۵- جابجایی‌های زاویه‌ای را ψ_1، ψ_2 و ... را



محدودیت های R_0

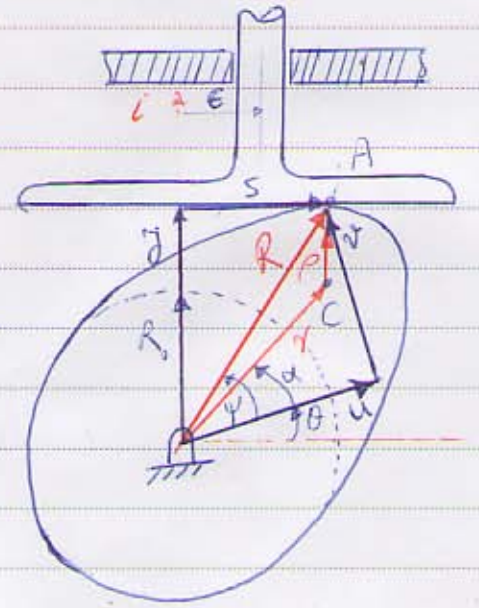
جهت استفاده از مواد کمتر برای تهیه بادامک و تولید ساده و ارزان تر سعی بر کم نمودن R_0 است حال سؤال این است که آیا حد کمینه ای برای R_0 وجود دارد یا خیر؟

اگر مقدار R_0 را از حد معینی کمتر نماییم با پدیده undercut، زیر بریدگی، روبرو خواهیم شد. در واقع با کم نمودن R_0، پروفیل بادامک دچار شکستگی یا نقاط تیز خواهد شد.

البته پدیده زیر بریدگی فقط به خاطر کم کردن R_0 اتفاق نمی افتد. در مواقعی که به ازای دوران کم بادامک، گوری زیادی را نیز از پیرو خواسته باشیم با این پدیده نیز مواجه خواهیم شد.

حال سعی می کنیم به روش تحلیلی علاوه بر طراحی پروفیل بادامک، محدودیتی برای R_0 بیابیم.

مکانیزم پیرو و بادامک (با پیرو تخت رفت و برگشتی)



C: مرکز انحنای (منحنی) در نقطه تماس

u، v: دو محور عمود بر هم متصل به پروفیل بادامک

$\vec{r}$: بردار مکان نقطه C

$\vec{R}$: بردار مکان نقطه تماس A

ρ: شعاع انحنای نقطه تماس

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{\rho} \sim (R_0 + y)i + s = re^{i(\theta+\alpha)} + \rho i \qquad (a)$$

از آن جا که پیرو همواره بر پروفیل مماس است، ρ در راستای قائم قرار می گیرد.

با مساوی قرار دادن طرفین حقیقی و موهومی این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} R_0 + y = r\sin(\theta+\alpha) + \rho & (b) \\ s = r\cos(\theta+\alpha) & (c) \end{cases}$$

از آنجا که نقطه C، مرکز انحنا، یک نقطه ساکن بر روی پروفیل بادامک است. مقادیر r، α، ρ برای مقدار کوچک θ تغییر نمی‌کنند یعنی:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

دقت کنید که مقادیر r، α و ρ ثابت نیستند بلکه برای نقطه C، مقدار ساکن، stationary هستند ولی مشتقات بالا در آنها برابر صفر نیست.

با مشتق گیری از رابطه (b) نسبت به θ خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos(\theta+\alpha) \underset{(c)}{=} s \qquad (d)$$

$$\therefore\ s = y' \qquad (e)$$

با مشتق گیری از رابطه (e) نسبت به θ خواهیم داشت:

$$y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2} = s' \qquad (f)$$

از (c) مشتق گرفته: $\frac{ds}{d\theta} = -r\sin(\theta+\alpha) \underset{(b)}{=} \rho - (R_0 + y)$ (g)

$$(f),(g) \rightarrow R_0 + y = -y'' + \rho \rightarrow \rho = R_0 + y'' + y$$

در پدیده زیر برش ρ به سمت صفر می‌رود، برای پرهیز از آن باید $\rho \neq 0$ از این رو

$$\rho = R_0 + y + y'' > \rho_{min}$$

حال R_0 قابل محاسبه است، y و R_0 هر دو مثبت هستند، می‌دانیم y'' در بیشترین مقدار منفی اتفاق می‌افتد، از این رو مقدار y را در همان θ ای قرار می‌دهیم که y'' می‌ن اتفاق می‌افتد:

$$R_0 > \rho_{min} - y''_{min} - y$$

محاسبه عرض (پهنای) پیرو:

(c) : $\text{Face width} > y'_{max} - y'_{min}$

با توجه به مختصات بردارهای u و v می‌توان نوشت:

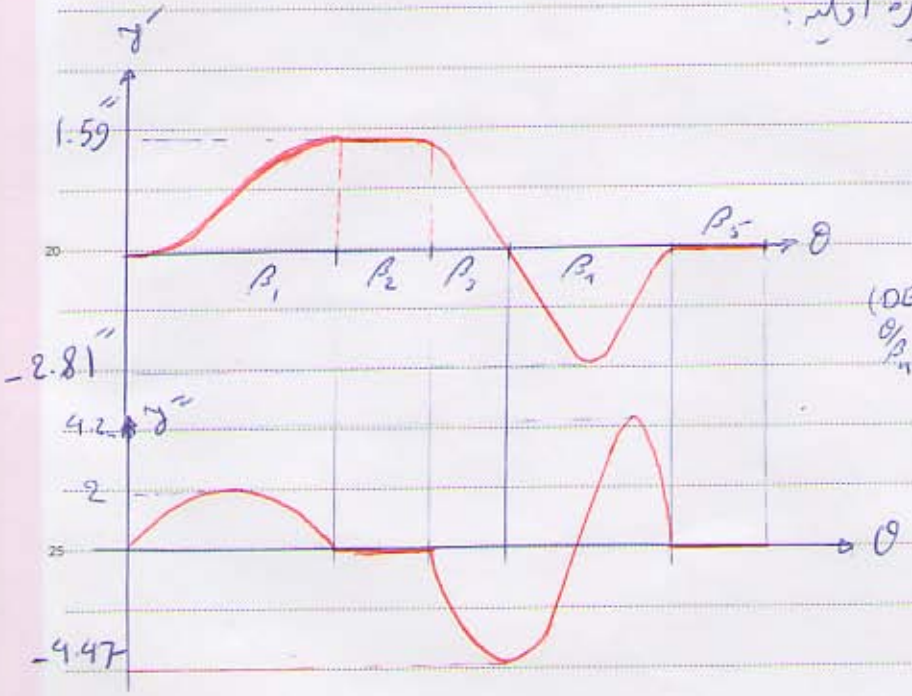
$$(R_0+y)i + s = ue^{i\theta} + ve^{i(\theta+\pi/2)}$$

طرفین را بر $e^{i\theta}$ تقسیم نموده: $(R_0+y)e^{-i\theta}i + se^{-i\theta} = u + ve^{i\pi/2} = u+iv$

$$\begin{cases} u = (R_0+y)\sin\theta + \cancel{s}\,y'\cos\theta \\ v = (R_0+y)\cos\theta - \cancel{s}\,y'\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{(R_0+y)^2 + (y')^2} \\ \psi = \pi/2 - \theta - tg^{-1}\left(\dfrac{y'}{R_0+y}\right) \end{cases}$$

مثال: اگر منحنی تغییر مکان پیرو به صورت مثال قبل باشد که از پیرو تخت استفاده شود مطلوبست محاسبه پهنای پیرو و شعاع دایره اولیه:



$$y'_{max} = \frac{L_2}{\beta_2} = 1.59 \text{ in/rad}$$

$$\left(\text{DE } \theta/\beta_4 = 0.5\right),\ y'_{min} = -2.81$$

$$\text{Face width} > 1.59 + 2.81 = 4.4$$

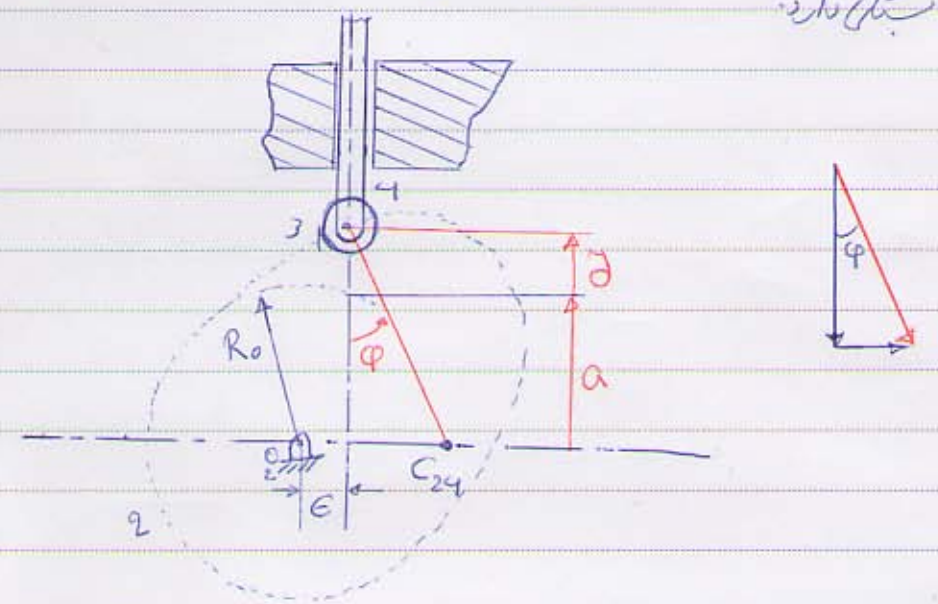
$$y''_{min} \text{ at } D,\ \left(\theta/\beta_3 = 1\right) \rightarrow y''_{min} = \frac{-\pi^2 L_3}{4\beta_3^2} = \frac{-\pi^2(0.566 \text{ in})}{4(0.559 \text{ rad})^2} = -4.47 \text{ in/rad}^2$$

$$R_0 > 0.25 + 4.47 - 3.00 = 1.72 \text{ in} \rightarrow R_0 = 1.75 \text{ in}$$

زاویه فشار:

زاویه بین مسیر حرکت پیرو و محور مشترک سطوح در تماس بادامک و پیرو، زاویه فشار نامیده می‌شود. (زاویه φ در شکل)

واضح است که این زاویه در لحظات مختلف طی یک سیکل حرکت تغییر می‌کند. باید در نظر داشت که تنها نیرویی که یک بادامک می‌تواند بر پیرو خود اعمال کند در امتداد محور مشترک آن دو است. اگر این نیرو به دو مؤلفه عمودی و مماس (نسبت به مسیر حرکت پیرو) تجزیه شود، روشن است که نیروی عمودی موجب اصطکاک شده و مزاحم است. در نتیجه باید در طی سیکل حرکت، این مؤلفه در صورت امکان کوچک نگه داشته شود و در حالت کلی از 30-35° بیشتر نشود. البته به سختی می‌توان یک مقدار مکانیزم برای زاویه فشار منظور کرد چرا که اهمیت آن به بسیاری از عوامل نظیر سرعت بادامک، نوع پیرو، ضریب اصطکاک، مقاومت مکانیزمی که با پیرو رانده می‌شود و غیره بستگی دارد.



نقطه C_{24}، مرکز آنی سرعت بین عضو 2 (بادامک)، 4 (پیرو) است.

$$V_{C_{24}} = \dot{y} = \omega_2 \cdot (O_2 C_{24}) \quad (a) \qquad \dot{y} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = y'\omega_2 \quad (b)$$

$$(a), (b) \rightarrow y' = O_2 C_{24}$$

$$O_2 C_{24} = \underset{\text{از شکل}}{y'} = \epsilon + (a+y)\tan\varphi \qquad a = \sqrt{R_0^2 - \epsilon^2}$$

$$\rightarrow y' = \epsilon + (y + \sqrt{R_0^2 - \epsilon^2})\tan\varphi \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y' - \epsilon}{\sqrt{R_0^2 - \epsilon^2} + y}\right)$$

براساس رابطهٔ فوق، می‌توان مشاهده نمود که زاویه فشار را، برای یک دیاگرام تغییر مکان مشخص به یکی از روشهای زیر می‌توان کاهش داد:

۱- افزایش شعاع دایرهٔ اولیه (R_0)
۲- افزایش زاویهٔ دوران بادامک برای یک مقدار تغییر مکان پیرو (در نتیجه کاهش y')
۳- کاهش تغییر مکان کل پیرو (در نتیجه کاهش y')
۴- تغییر مقدار خروج از محور پیرو (e^*)
۵- تغییر نوع حرکت پیرو (کیفیت) (سرعت ثابت، شتاب ثابت و غیره)

توضیحات بند ۴: با افزایش e، می‌توان φ را کاهش داد. (منظور حرکت رفت است زیرا در رفت $y'>0$ و در این موقع کسر مثبت است) در واقع در رفت، سرعت پیرو مثبت است و شکل ندارد ولی در برگشت چون سرعت منفی است افزایش e باعث زیاد شدن زاویه فشار می‌شود اما چون در حرکت برگشت پیرو کار است مشکلی نخواهیم داشت.

تأثیر R_0 بر φ:

$$\tan\varphi = \frac{y'}{y+R_0}$$

برای بررسی اثر R_0 می‌توان $e=0$ را قرار داد. (برای سادگی)

ملاحظه می‌شود که φ تابع θ است لذا برای φ_{max} کافی است:

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\varphi) = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{y'}{y+R_0}\right] = 0 \rightarrow \theta = \checkmark \rightarrow \varphi_{max} = \checkmark$$

از آنجا که این با توجه به تعداد متغیرها در هر قسمت دایره، می‌توان از شکل ترسیمی رابطهٔ فوق سود جست. آقای mutley منحنی زیر را معرفی نموده است.

(نانلی) نموگرام

در این منحنی:
β: زاویه دوران بادامک (جهت بالای نموگرام)
R_0/L: نسبت شعاع دایرهٔ اولیه به کورس طی شده (محور افقی)
φ_{max}: ماکزیمم زاویه فشار خواهد بود.

- اگر بخواهیم $\varphi<25$ باشد با داشتن β در هر مرحله، R_0/L را از نموگرام بدست آورده (خطی از φ_{max} به β مربوطه وصل نموده، هر جا محور افقی را قطع نمود R_0/L بدست می‌آید) سپس با داشتن L آن مرحله، R_0 محاسبه می‌شود. بزرگترین R_0 که از چند مرحله حرکت پیرو بدست می‌آید R_0 انتخابی خواهد بود.

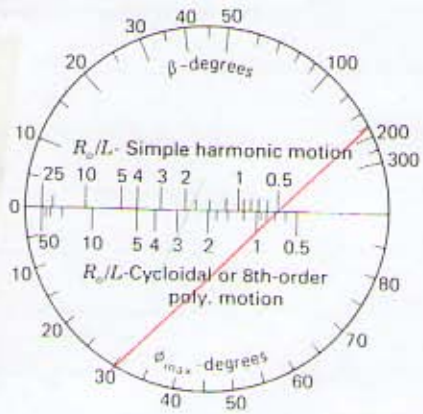
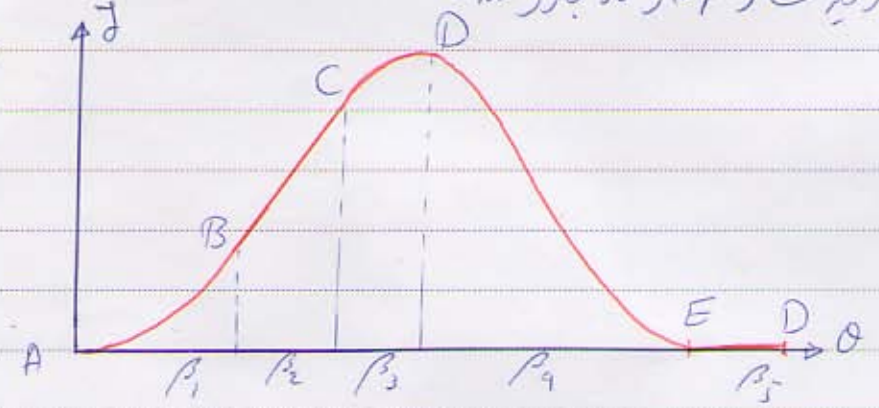


FIGURE 5-28
Nomogram relating maximum pressure angle ϕ_{max} to prime-circle radius R_O, lift L, and active cam angle β for radial roller-follower cams with simple harmonic, cycloidal, and eighth-order-polynomial full-rise or full-return motion.

مثال: اگر منحنی تغییر مکان پیرو به صورت مثال قبل باشد و پیرو از نوع غلتکی بدون خروج از محور باشد مطلوب است محاسبه R_o به گونه‌ای زاویه فشار φ از $30°$ تجاوز نکند.



$L_1 = 1.184''$ $\beta_1 = 85.18°$
$L_2 = 1.25''$ $\beta_2 = 45°$
$L_3 = 0.566''$ $\beta_3 = 32.05°$
$L_4 = 3''$ $\beta_4 = 107.77°$
$L_5 = 0$ $\beta_5 = 60°$

حل:

روش مشتق گیری:

$y, y' \checkmark \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y'}{R+y}\right) \rightarrow \frac{d\varphi}{d\theta} = 0 \rightarrow \theta = \checkmark \rightarrow \varphi_{max}\Big|_{\text{در کی بیشتر}} = \checkmark \quad \varphi_{max} = 30 \rightarrow R_o \checkmark$

روش نوگرام:

مت AB: از آنجایی که نوگرام mufley برای حرکت کامل (full) است و حرکت در مت AB، حرکت نیم دور (half) است از این رو برای استفاده از نوگرام L_1 و β_1 را دو برابر می‌کنیم.

$2L_1 = 2 * 1.184 = 2.37''$

$2\beta_1 = 2 * 85.18 = 170°$

نوگرام half cycloidal $\frac{R_o}{L} = 0.75 \rightarrow R_o = 0.75(2.37) = 1.78''$

قسمت BC: این ناحیه احتیاج به چک کردن ندارد زیرا بیشترین زاویه فشار در نقطه B اتفاق می‌افتد که در قسمت AB آمده است.

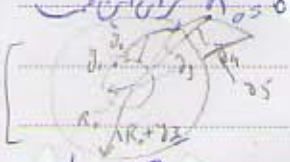
در این قسمت چون y ثابت است بنابراین با افزایش y، طبق رابطه $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{R_0+y}\right)$ مقدار φ کاهش می‌یابد (R₀ ثابت)

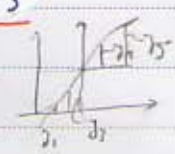
قسمت CD:

$2L_3 = 2 * 0.566 = 1.13''$ نمودار half harmonic $R_0/L = 1.9$ $\rightarrow R_0 = 1.9*(1.13) = 2.15''$

$2\theta_3 = 2 * 32.05° = 64°$

دقت کنید این مقدار R_0 مربوط به قسمتی است که این حرکت هارمونیک از $y=0$ شروع به حرکت کند و به این کورس برسد ولی این حرکت از نقطه C با کورس $y = 3.00 - 1.13 = 1.87$ شروع شده است از این رو برای این قسمت $R_0 = 0.3$ ، $R_0 = 2.15 - 1.87 = 0.3''$ کافی است انتخاب شود.





قسمت DE:

$L_4 = 3$ نمودار: $R_0/L = 1.33$ $\rightarrow R_0 = 1.33(3) = 4''$

$\beta_4 = 108°$ 8 درجه

حال برای اینکه φ از 30° تجاوز نکند لازم است از بین R_0های فوق بیشترین مقدار آن انتخاب شود: یعنی $R_0 = 4''$

حال در پایان با $R_0 = 4$ (انتخاب شده) می‌توان بیشترین زاویه فشار در هر مرحله را بدست آورد:

AB: $R_0/L = \frac{4}{2.37} = 1.69 \rightarrow \varphi_{max} = 18°$

CD: $R_0/L = \frac{5.87}{1.13} = 5.19 \rightarrow \varphi_{max} = 14°$

DE: $R_0/L = \frac{4}{3} = 1.33 \rightarrow \varphi_{max} = 30°$

محاسبه شعاع مینیمم منحنی بادامک : ρ_{min}

تعیین R_0 ، با توجه به زاویه فشار مناسب ، به تنهایی از بروز پدیده زیربرش جلوگیری می‌کند.

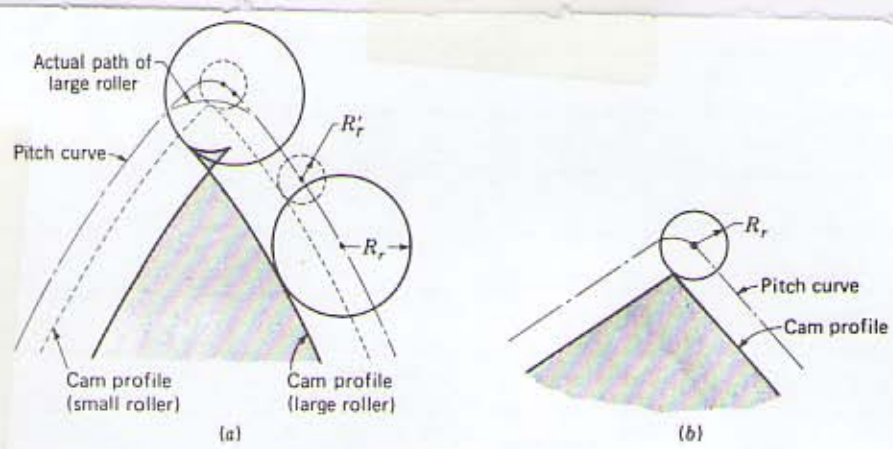


FIGURE 5-29

شکل (a) برای یک منحنی بادامک و برای دو غلتک پیرو با دو شعاع متفاوت پروفیل بادامک رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود برای غلتکی با شعاع R_r بزرگتر، پدیده زیربرش اتفاق افتاده است.

آیا میتوان پروفیل بادامک بدون زیربرش، برای پیروی با غلتک با شعاع R_r بزرگتر داشت؟ بلی

کافی است R_0 را بزرگتر انتخاب کنیم.

شکل (b) نشان می‌دهد که R_r ، با شعاع انحنای منحنی بادامک برابر شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود پروفیل بادامک را برای حالتی در این پدیده زیربرش اتفاق نیافته. برای پرهیز از زیربرش کافی است

$$\rho_{Pitch} = \rho + R_r$$

در این رابطه R_r شعاع غلتک پیرو، ρ_{Pitch} شعاع انحنای منحنی بادامک و ρ مقدار مینیمم شعاع انحنای پروفیل بادامک است.

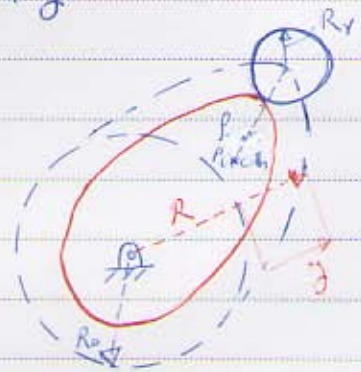
$$\rho_{Pitch}\Big|_{min} = \rho_{min} + R_r$$

اگر مکانیزم بدون خروج از محور باشد میتوان در مختصات قطبی نوشت:

$$R = R_0 + y$$

از حساب تغییرات می‌توان شعاع انحنا در مختصات قطبی برحسب R را بصورت زیر نوشت:

$$R = R_0 + y$$



R: شعاع انحنا نقطه‌ای روی منحنی پادامک

R_0: شعاع دایره اولیه

y: مقدار تغییر مکان پیرو

$(\rho_{Pitch} = \rho + R_r)$

$$\rho_{Pitch} = \frac{[R^2 + R'^2]^{3/2}}{R^2 + 2R'^2 - RR''} = \frac{[(R_0+y)^2 + y'^2]^{3/2}}{\underbrace{(R_0+y)^2 + 2y'^2 - (R_0+y)y''}_{f(\theta)}} = \rho + R_r \qquad (9)$$

با مشتق‌گیری می‌توان مقدار مینیمم $f(\theta)$ را بدست آورد و سپس مقدار ρ_{min} را از رابطه $\rho_{min} = f(\theta)|_{min} - R_r$ بدست آورد.

با توجه به شکل بودن آن می‌توان از منحنی‌های مربوطه استفاده نمود.

نکته: با توجه به رابطه (9)، در جایی که $y'' > 0$ است امکان وجود داشتن ρ_{min} نیست.

(در این رابطه با $y'' > 0$، ρ زیاد می‌شود بنابراین در مکان‌هایی به دنبال ρ_{min} هستیم که $y'' < 0$ باشد.)

مثال: اگر برای حرکت پیرو مثال قبل، از پیرو غلتکی (بدون خارج از مرکز) با مشخصات $R_r = 0.5''$ و شعاع اولیه $R_0 = 4''$ استفاده شود حداقل شعاع انحنای پروفیل پادامک را بدست آورید. ($\rho_{min} = ?$)

حل: چون در قسمت AB، $y'' > 0$ و BC، $y'' = 0$ نیاز به چک کردن ندارد.

قسمت BC:

$L_3 = 0.566''$

$\beta_3 = 32^\circ$

$$\rightarrow \frac{R_0}{L} = \frac{4.0 + L_1 + L_2}{L_3} = \frac{6.434}{0.566} = 11.4$$

چون y از صفر شروع می‌شود

R_0 به این خاطر با L_1+L_2 جمع شده است چرا که منحنی مربوط به ρ_{min} برای $\gamma=0$ رسم شده اند.

Fig. 5-33b → $(\rho_{min}+R_2)/R_0 = 0.66 \rightarrow \rho_{min} = 0.66R_0 - R_2$

$= 0.66(6.434) - 0.5$

$= 3.75''$ ←

$L_4 = 3''$ $\quad R_0/L = 4/3 = 1.33 \xrightarrow{\text{Fig}} 5\text{-}32a$ $\quad$ قسمت DE :

$\beta_4 = 10.8^\circ$

$\rightarrow (\rho_{min}+R_2)/R_0 = 1 \rightarrow \rho_{min} = 0.8 R_0 - R_2$

$3.2 - 0.5 = 2.7''$ ←

یعنی مقدار کوچکتر

بنابراین مقدار کوچکتر که برای ρ اتفاق می افتد $\rho_{min} = 2.7''$ خواهد بود و زیر برش در آن نداریم. بنابراین میتوان R_2 نیز بیشتر انتخاب نمود تا هنگامی که ρ_{min} به حوالی عدد مورد نظر (و در حالت حدی) برسد.

Subject : Date : 138 / /

سنتز مکانیزم ها:

سنتز مکانیزم ها: سنتز عبارت است از طراحی یک مکانیزم برای یک هدف معین نظیر انتقال و یا تبدیل یک حرکت، هدایت یک عضو در مراحل و مسیرهای مشخص و یا هدایت نقاط یک عضو.

آنالیز مکانیزم ها: تجزیه و تحلیل یک مکانیزم مشخص و بررسی خصوصیات و مشخصات آن مکانیزم. در این مرحله به دنبال بررسی و مطالعه روی مکانیزم هستیم که ببینیم آیا مشخصات مورد طراحی را برآورده کرده است یا خیر؟

در یک طراحی کامل سنتز و آنالیز یک سیکل را تشکیل می دهند که تا رسیدن به طراحی بهینه ادامه پیدا می کند.

سنتز ← آنالیز

انواع سنتز مکانیزم:

۱- **سنتز نوع:** یک سنتز نوع مکانیزم تعیین می شود. مکانیزم های میله ای، اهرمی، چرخ دنده ای، پولی و تسمه و ... از مکانیزم های هم هسته (انواع دیگر زمینه (۱) آورده شود.)

۲- **سنتز تعدادی:** در این سنتز تعداد اعضای مکانیزم، درجات آزادی مکانیزم، تعداد و نوع مفاصل و ... مشخص می گردد.

۳- **سنتز ابعادی:** در این سنتز ابعاد مکانیزم تعیین می گردد.

سنتز نوع:

فصل هم کتاب (اردلان ۷۰۴-۰۴)

TJ 181 A78 1- Mechanisms in modern engineering design : by Artobolevsky

(ترجمه مکانیزم در مهندسی مدرن: نوشته آرتوبولفسکی، یا مکانیزم های ماشینی TJ 227 T4)

2- اصول طراحی مکانیزم ها: دکتر زرکوب TJ 230 ۶۱ الف ۴ ز

TJ 181 29 ج ط ۱۳۷۹ 3- طراحی مکانیزم ها برای طراحان و ماشین سازان: مؤلف نیکولز: مترجم اشعر خورشیدی

TJ 181 T4 م۷ 4- ترجمه مورد اول: مکانیزم ها در طراحی مهندسی مدرن (۱) تالیف: آرتوبولوسکی: مترجم حسن نیک بخت

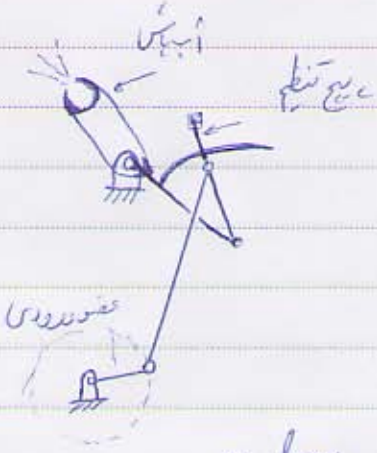
سنتز نوع (ادامه)

مکانیزم ها از نظر کاربرد به سه دسته عمده تقسیم می شوند:

الف- تولید تابع: Function Generation: (F.G.)

در این نوع مکانیزم، عضو خروجی برحسب تابع معینی برحسب عضو ورودی به حرکت درمی آید.

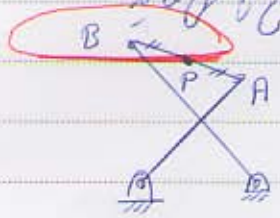
مثال ۱: در این مکانیزم چهار میله ای دامنه ی مختلف نوسان سرآب پاشی به حرکت دورانی کامل لنگ حاصل می شود. به کمک پیچ تنظیم می توان زاویه ی اهرم خروجی را به عنوان تابعی از ورودی تنظیم نمود.



مثال ۲: تولید تابع $y = \log x$

ب- تولید مسیر: Path Generation (P.G.)

در این نوع مکانیزم یک نقطه خاص از یک عضو، یا یک مفصل باید مسیر مشخصی را طی نماید.



مثال: حرکت تقریباً مستقیم الخط یک نقطه نظیر P

ج- تولید حرکت یا هدایت جسم صلب: Motion Generation (M.G.)

در این نوع مکانیزم، جسم صلب مورد نظر باید از موقعیت های معینی عبور نماید (خلاف تولید مسیر و تفاوت کل جسم صلب حائز اهمیت است)

مثال: مکانیزم چهار میله ای کابوت یک اتومبیل.

سنتز تعدادی:

درجه آزادی یک مکانیزم: تعداد پارامترهای مستقل و لازم برای تعیین موقعیت یک سیستم را درجه آزادی سیستم می‌گویند.

- برای یک نقطه که در امتداد یک خط حرکت می‌کند دارای یک درجه آزادی، و یک صفحه، دو درجه آزادی و در فضا اگر حرکت نماید دارای سه درجه آزادی است.
- برای یک جسم صلب وقتی که در یک صفحه حرکت می‌کند سه درجه آزادی وجود دارد (دو تا برای انتقال و یکی جهت چرخش)
- یک جسم صلب در فضا دارای شش درجه آزادی است.

تعداد درجات آزادی برای یک مکانیزم صفحه‌ای:

$$F = 3(n-1) - 2f_1 - f_2$$ Gruebler's equation

F: تعداد درجات آزادی مکانیزم

f_1: تعداد مفاصل یک درجه آزادی

f_2: تعداد مفاصل دو درجه آزادی

مفاصل:

مفاصل یک درجه آزادی:

1- Pin (revolute)

$n=2$, $f_1=1$, $f_2=0$ $\rightarrow F=1$

2- Slider (Prismatic)

$n=2$, $f_1=1$, $f_2=0$ $\rightarrow F=1$

3- Rolling contact (no sliding)

$n=2$, $F=1$ $\equiv$

$n=2$, $f_1=1$ $\rightarrow F=1$

4- Roll-slide

$n=2$, $f_1=0$, $f_2=1$, $F=2$ $\equiv$

$n=3$, $f_1=2$ $\rightarrow F=2$, $f_2=0$

5- Gear contact

Pitch circle

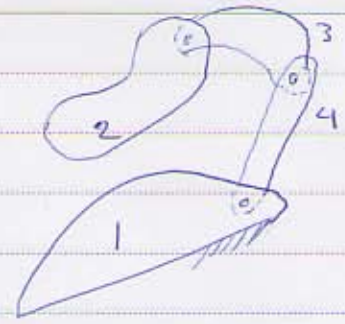
دقت کنید در لحظه‌ی دو دنده بر روی دایره‌ی گام غلتش و لغزش است.

$n=3$, $f_1=2$, $f_2=1$, $F=1$ $\Rightarrow$

$n=4$, $f_1=4$, $f_2=0$ $\Rightarrow F=1$

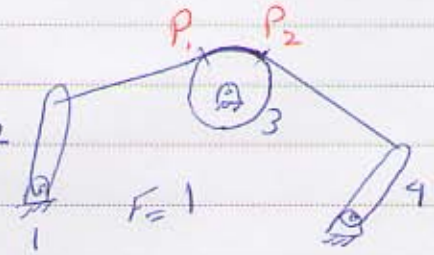
6_ Spring

$n = 2$
$f_1 = 0$
$f_2 = 0$
$F = +3$



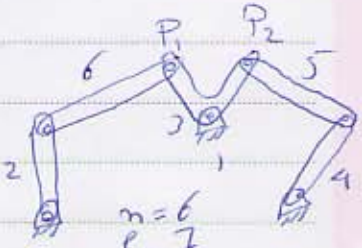
$n = 4$
$f_1 = 3$
$f_2 = 0$
$F = 3$

7_ Belt and pulley (no sliding) or chain and sprocket



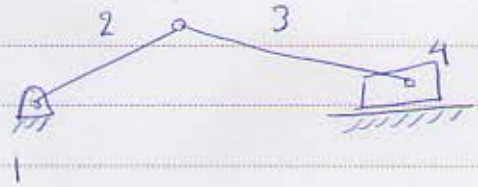
$F = 1$

$\equiv$



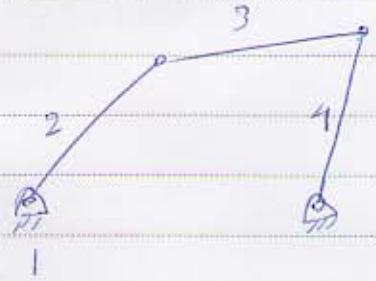
$n = 6$
$f_1 = 7$
$f_2 = 0$
$F = +1$

مثال ۱:



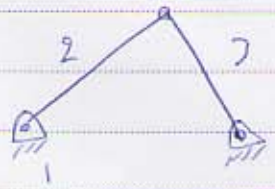
$n = 4$
$f_1 = 4$ $\quad F = 3(4-1) - 2*4 = 1$
$f_2 = 0$

مثال ۲:



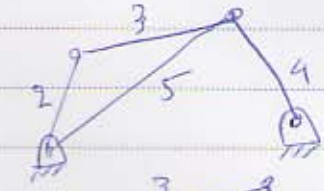
$n = 4$
$f_1 = 4$ $\quad F = 1$
$f_2 = 0$

مثال ۳:

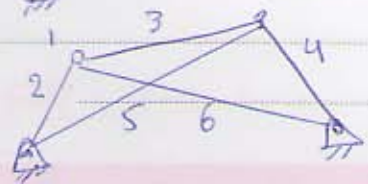


$n = 3$
$f_1 = 3$ $\quad F = 0$ $\quad$ مکانیزم معلم (سازه)
$f_2 = 0$

مثال ۴:



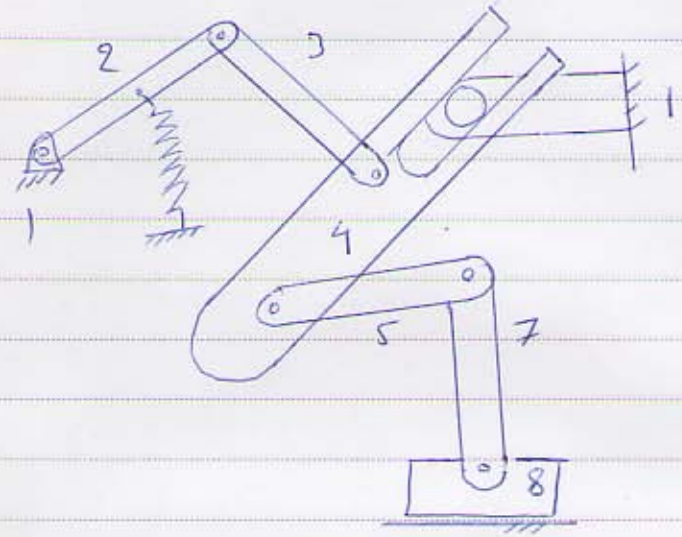
$n = 5$
$f_1 = 6$ $\rightarrow F = 0$
$f_2 = 0$



مثال ۵:

$n = 6$
$f_1 = 8$ $\rightarrow F = -1$ $\quad$ مکانیزم معلم و فاقد (سازه معلم)

مثال:



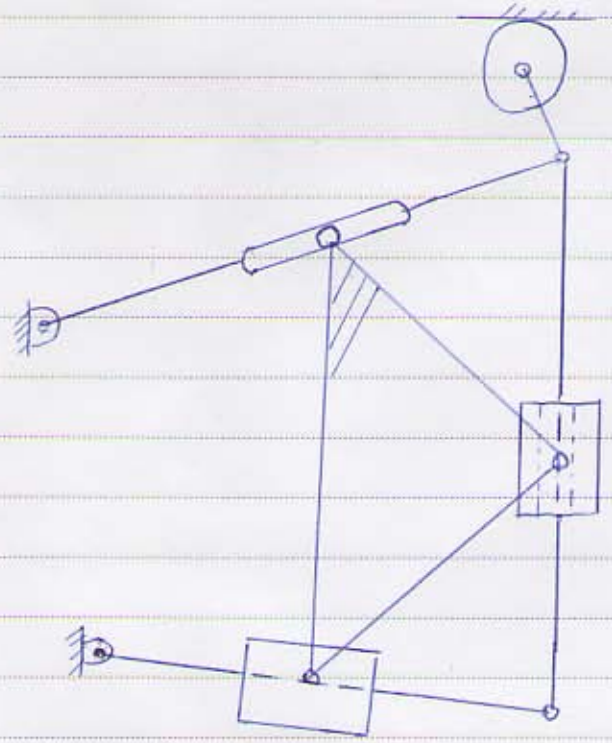
$n=7$

$f_1=7$

$f_2=1$

$F=3$

مثال:



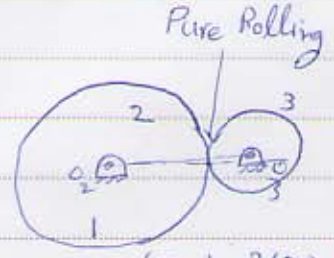
$n=9$

$f_1=11 \rightarrow F=1$

$f_2=+1$

مثال های نقض:

$F=0$ $F=1$



$r_2+r_3={}^{o}_{2}{}^{o}_{3}$

$F=3(3-1)-2(3)=\cancel{0}$ $F=1$

باید به فیزیک مکانیزم توجه داشت.

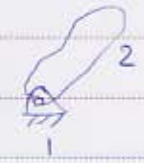
مسئله: مطلوبست مکانیزم‌های یک درجه آزادی بدون مفاصل دو درجه آزادی:

حل:

$F = 3(n-1) - 2f_1 - f_2$ $\qquad F = 1,\ f_2 = 0$

$\rightarrow 3(n-1) = 2f_1 + 1 \rightarrow 3n - 2f_1 = 4$ معادله سیاله

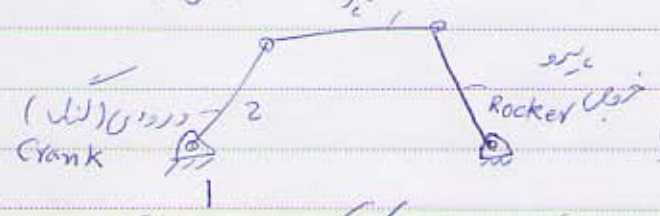
جواب اول: $n = 2,\ f_1 = 1$



$\rightarrow$ مکانیزم نیست (شکل بسته نیست)

$n = 3$ و $f_1 = 5/2$ مکانیزمی وجود ندارد

$n = 4,\ f_1 = 4$



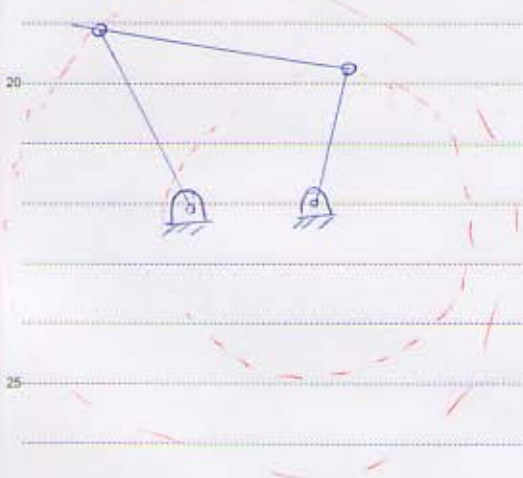
مکانیزم لنگ لغزنده یا

بنابراین مکانیزم چهار میله ای تنها مکانیزمی است که با کمترین عضو دارای یک درجه آزادی است.

تقسیم بندی مکانیزم چهار میله ای با توجه به نوع حرکت:

الف - مکانیزم لنگ دوبل:

Dobble - crank



لنگ و پیرو هر دو دوران کامل دارند.

ب - مکانیزم لنگ نوسانی:

یکی از اعضا (لنگ یا پیرو) دوران کامل و دیگری حرکت نوسانی دارد.

ج - مکانیزم نوسانی دوبل:

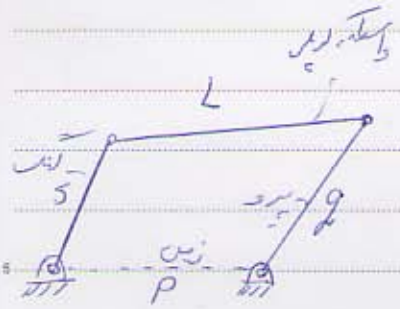
هر دو عضو لنگ پیرو دارای نوسان دوبل است.

نوع حرکت که که یک از موارد فوق با کمک بستگی به طول اعضا و فاصله دو تکیه گاه دارد که توسط قانون گراشف بیان می‌شود

Grashoff

قانون گراشف :

اگر در یک مکانیزم چهار میله ای



$L+S<P+q$

باشد آن مکانیزم را مکانیزم گراشف می گویند

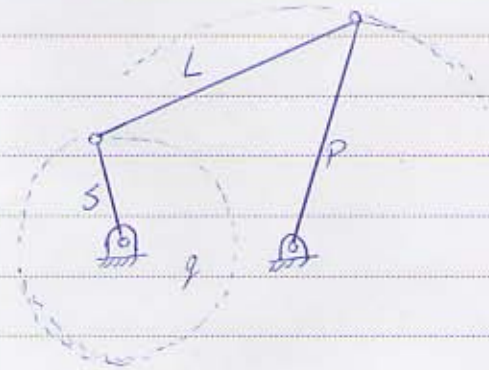
L: طول بزرگترین عضو

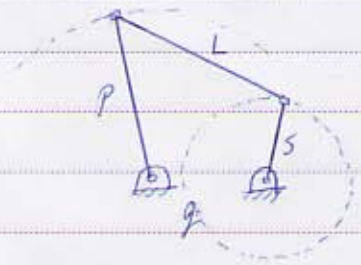
S: طول کوتاه ترین عضو

P و q: طول دو عضو دیگر

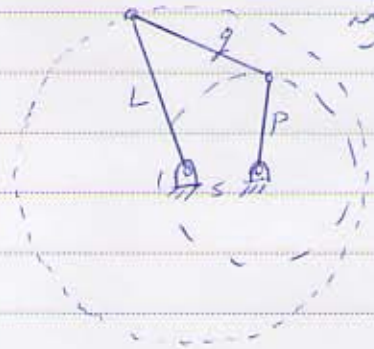
برای یک مکانیزم گراشفی سه حالت زیر امکان پذیر است:

الف - اگر عضو مجاور زمین (لنگ و یا بیرو) کوتاه ترین عضو مکانیزم باشد در این صورت این عضو دوران کامل خواهد نمود به آن مکانیزم لنگ - نوشانی گویند.

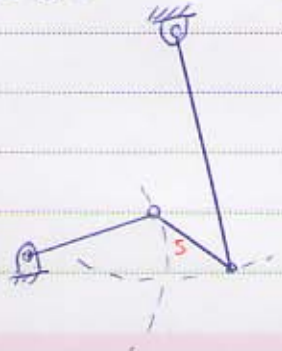




ب - اگر عضو ثابت (زمین) کوتاه ترین عضو مکانیزم باشد، در این صورت عضو ورودی و خروجی (لنگ و بیرو) دوران کامل دارند که به آن مکانیزم لنگ دوبل می گویند



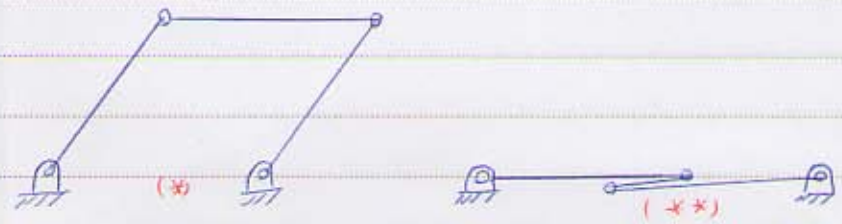
ج - اگر عضو مقابل زمین، کوتاه ترین عضو مکانیزم باشد در این صورت عضو ورودی و خروجی حرکت نوسانی دارند و به آن، مکانیزم نوسانی دوبل گفته می شود.



- اگر $L+S > P+Q$ باشد آنرا مکانیزم غیرلراشف گویند و حرکت مکانیزم به صورت

لنگ - نوسانی خواهد بود.

- اگر $L+S = P+Q$ باشد حالتهای مکانیزم گراشف را خواهیم داشت در صورتی این مکانیزم که شکل به نام نقطه تغییر (change Point) را دارا هستند. این پدیده هنگامی اتفاق می‌افتد که تمامی مفاصل در یک امتداد قرار گیرند. در این نقطه ممکن است جهت دوران لنگ محرک مکانیزم تغییر کند (*) و یا ممکن است قفل شدگی در مکانیزم حاصل شود (**)



معکوس سینماتیکی: Kinematic inversion

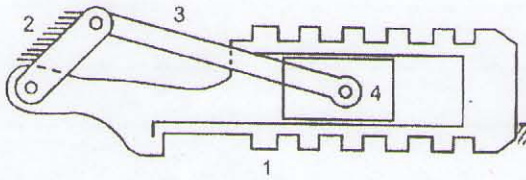
هر مکانیزم از ثابت نگه داشتن یک عضو از یک زنجیره سینماتیکی به دست می‌آید. با انتخاب اعضای مختلف به عنوان عضو ثابت، مکانیزم‌های متفاوتی به وجود می‌آید که به آن‌ها، معکوس سینماتیکی یکدیگر می‌گویند. به عبارت دیگر اگر در یک مکانیزم، عضو ثابت (زمین) را تغییر دهیم، مکانیزم کمی وارون سینماتیکی آن مکانیزم به دست می‌آید.

مثال: وارونهای سینماتیکی مکانیزم لنگ - لغزنده را به دست آورید (کاربرد: موتورهای احتراق داخلی، پرس مکانیکی)

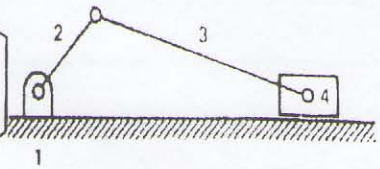
۱- مکانیزم لنگرم (Gnome)
(میل لنگ ثابت (۲)، بلندر متصل به لنگ دوار (۱)، پیستون (۴))

۲- شاتون ثابت (قابل کاربرد در موتور کشتی)

۳- لغزنده ثابت (مکانیزم تلمبه کمی دستی آب)

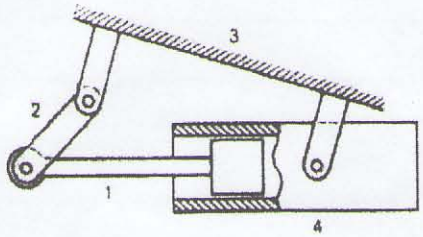


شکل۱-۲۱. مکانیزم لنگ لغزنده

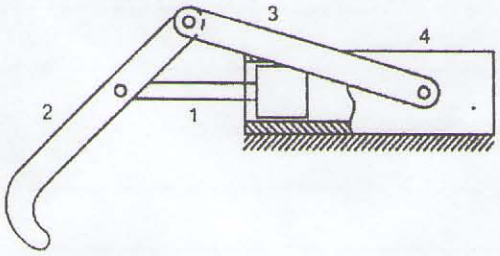


شکل۱-۲۲. مکانیزم گنوم

در شکل ۱-۲۱ عضو شماره یک ثابت است که کاربردهای رایج آن در موتورهای احتراق داخلی و پرس‌های مکانیکی می‌باشد. در شکل ۱-۲۲ عضو ۲ عضو ثابت در نظر گرفته شده است. در این نوع مکانیزم که در موتور هواپیمای گنوم[1] استفاده می‌شود، میل‌لنگ به بدنه ثابت نگه داشته می‌شود و سیلندرها اجازه حرکت دورانی دارند و با ملخ هواپیما یک پارچه می‌شوند. در شکل‌های ۱-۲۳، عضو ۳ یا شاتون ثابت در نظر گرفته شده است. از این مکانیزم در موتورهای کشتی استفاده می‌شود. در شکل ۱-۲۴، عضو ۴ یعنی لغزنده ثابت در نظر گرفته شده است. از این مکانیزم در پمپ‌های (تلمبه‌های) دستی استفاده می‌شود.



شکل ۱-۲۳. مکانیزم موتور کشتی

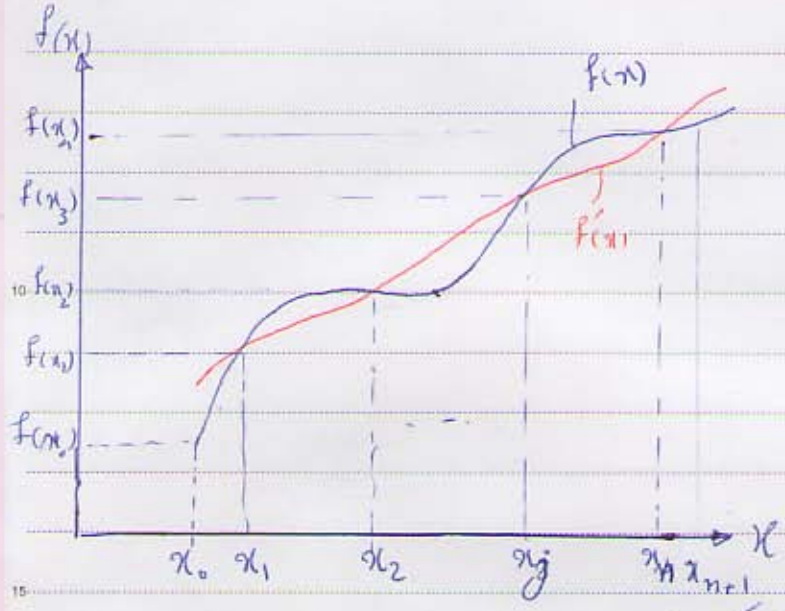


شکل ۱-۲٤. مکانیزم پمپ دستی

[1]- *Gnome*

Chebyshev : فاصله گذاری نقاط چبی شف :

در مسایل طراحی F.G. هدف طراحی مکانیزمی است که ورودی خروجی را با تابع $J = f(x)$ به یکدیگر ارتباط دهد که x همان پارامتر نظیر حرکت ورودی است. در این طراحی ممکن است که تنها در نقاط محدودی قادر به تولید دقیق تابع $J = f(x)$ باشیم. به نقاطی که دقیقاً تولید می‌شود نقاط دقت گفته می‌شود.



در مسئله P.G. نیز همین مطلب صادق است.

$f(x)$: مورد انتظار (درخواستی)

$f'(x)$: مکانیزم تولید می‌کند.

- چگونه می‌توان اختلاف بین $f(x)$ و $f'(x)$ را کاهش داد.

الف- افزودن نقاط دقت

ب- کاهش اختلاف بین دو منحنی $f(x)$ و $f'(x)$ (مثلاً در بیشترین انحراف)

$$e = f(x) - f'(x) \qquad x_0 < x < x_{n+1}$$

یک راه : استفاده از نقاط دقت چبی شف :

$$x_j = x_0 + \frac{\Delta x}{2}\left(1 - \cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$$

n : تعداد نقاط دقت

$\Delta x = x_{n+1} - x_0$

x_j : مختصات نقطه j ام فاصله

x_0 : نقطه ابتدای دامنه (جزء نقاط دقت نیستند)

x_{n+1} : نقطه انتهای دامنه

مثال: مطلوب است فاصله گذاری نقاط چبی شف برای یک مکانیزم چهار میله‌ای که تابع $J = 2x^2 - 1$ را در فاصله $1 \le x \le 2$ تولید نماید از چهار نقطه دقت چبی شف استفاده نمایید.

حل:

$$x_j = x_0 + \frac{\Delta x}{2}\left(1 - \cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$$

$x_0 = 1$

$x_5 = 2$

$\Delta x = x_5 - x_0 = 1$

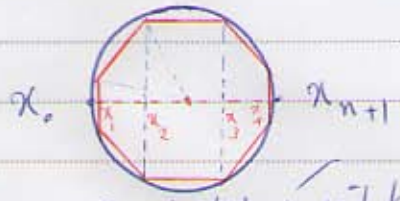
$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right) = 1.04$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right) = 1.31$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{8}\right) = 1.69$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{7\pi}{8}\right) = 1.96$$

روش ترسیمی: اگر یک دایره به قطر Δx رسم نماییم و یک $2n$ ضلعی منتظم به نحوی که یکی از اضلاع آن عمود بر قطر دایره باشد در آن محاط نماییم نقاط تلاقی چند ضلعی، نقاط چبی شف را معرفی می‌کنند.



با چهار نقطه دقت:

دقت کنید که فاصله نقاط دقت چبی شف یک نیست ولی از ابتدا و انتها به یک اندازه است

مثال ۲: چنانچه مکانیزمی برای خروجی $y = 3x^3 + 11x^2 + 20x + 7$ طراحی شده باشد ولی این مکانیزم خروجی $y' = Ax^2 + Bx + C$ را به طور واقعی تولید نماید. در این صورت برای به حداقل رساندن خطای حاصله بین دو تابع مورد درخواست و تابع ایجاد شده در فاصله $0 \le x \le 1$ این دو تابع در چه نقاطی باستی تلاقی داشته باشند و در این صورت ضرایب A, B, C را بدست آورید.

حل:

$n = 3$, $x_0 = 0$, $x_4 = 1$, $\Delta x = 1$

$$x_1 = 0 + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi}{6}\right] = 0.067$$

$$x_2 = 0 + 0.5\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 0.5$$

$$x_3 = 0 + 0.5\left(1 - \cos\frac{5\pi}{6}\right) = 0.933$$

از آنجا که تابع واقعی تولید شده درجه ۲ بوده بنابراین حداکثر می‌تواند سه نقطه دلخواه و مورد نظر ما تعیین نماید.

حال نقاط تلاقی را دو دو تا با هم بدست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = 3x_1^3 + 11x_1^2 + 20x_1 + 7 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = 3x_2^3 + 11x_2^2 + 20x_2 + 7 \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = 3x_3^3 + 11x_3^2 + 20x_3 + 7 \end{cases}$$

که می‌توان به روش کرامر A، B و C بدست آورد.

مثال ۳: با فرض آنکه یک مکانیزم چهار میله‌ای از نوع F.G. بخواهد تابع $y = x^2 - 1$ را (مثال ۱) تولید نماید مقادیر φ_i و ψ_i $i = 1,2,3,4$ را بدست آورید (با فرض $\Delta\varphi = 60^\circ$, $\Delta\psi = 90^\circ$)

حل:

$x_0 = 1$ $\quad y_0 = 1$

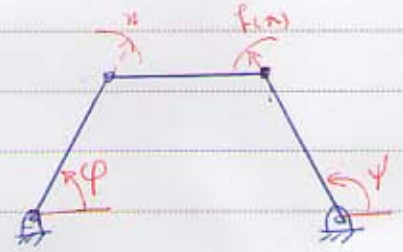
$x_1 = 1.04$ $\quad y_1 = 1.16$

$x_2 = 1.31$ $\quad y_2 = 2.43$

$x_3 = 1.69$ $\quad y_3 = 4.71$

$x_4 = 1.96$ $\quad y_4 = 6.68$

$x_5 = 2$ $\quad y_5 = 7$



x را به صورت خطی با φ و

y را نیز به صورت خطی با ψ مرتبط می‌کنیم:

$$\varphi_j - \varphi_0 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}(x_j - x_0) \qquad \Delta\varphi = \varphi_5 - \varphi_0 \qquad \psi_j - \psi_0 = \frac{\Delta\psi}{\Delta y}(y_j - y_0)$$

$$\varphi_j = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}(x_j - x_0) + \varphi_0$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{60}{1}(x_1 - x_0) = 60(1.04 - 1) = 2.4^\circ \qquad \psi_1 - \psi_0 = \frac{90}{6}(1.16 - 1) = 2.4^\circ$$

$$\varphi_2 - \varphi_0 = \frac{60}{1}(1.31 - 1) = 18.6^\circ \qquad \psi_2 - \psi_0 = \frac{90}{6}(2.43 - 1) = 21.5^\circ$$

$$\varphi_3 - \varphi_0 = 60(1.69 - 1) = 41.4^\circ \qquad \psi_3 - \psi_0 = \frac{90}{6}(4.71 - 1) = 55.65^\circ$$

$$\varphi_4 - \varphi_0 = 60(1.96 - 1) = 57.6^\circ \qquad \psi_4 - \psi_0 = \frac{90}{6}(6.68 - 1) = 85.2^\circ$$

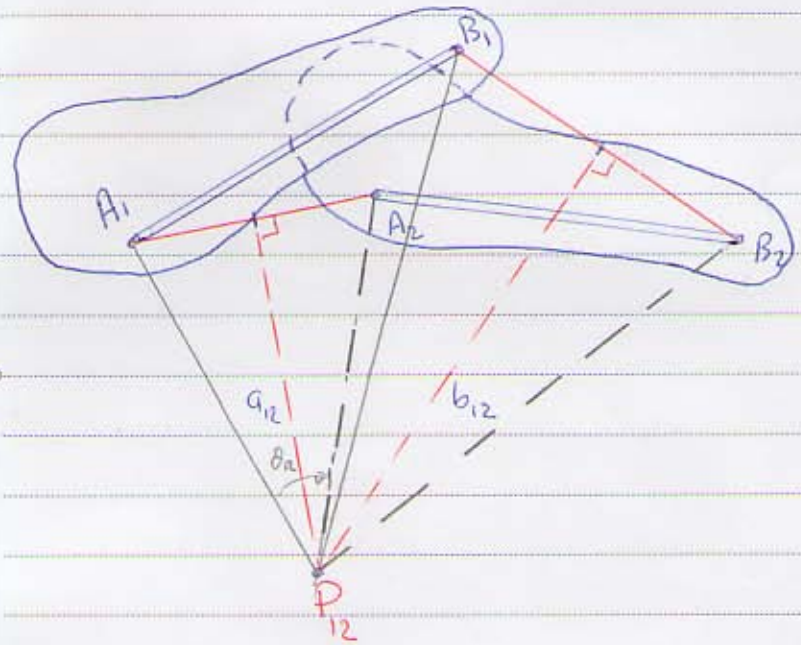
طراحی مکانیزم چهار میله‌ای (به روش ترسیمی)

مسئله: جسم صلبی را در نظر بگیرید. آیا می‌توان به وسیله دوران حول یک نقطه، جسم را از حالت ① به ② منتقل کرد؟

جواب: آری

می‌توان با دوران حول یک نقطه که به قطب دوران مشهور است این کار انجام داد. اگر نقاط A_1 و B_1 را روی جسم صلب در موقعیت اولیه جسم در نظر بگیریم و نقاط A_2 و B_2 به ترتیب موقعیت ثانویه A_1 و B_1 باشند قطب دوران P_{12} از تقاطع عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های A_1A_2 و B_1B_2 به دست می‌آید. بنابراین عضو AB با دوران حول P_{12} از موقعیت ① به موقعیت ② منتقل می‌شود.

اگر قطب دوران P_{12} به عنوان نقطه ثابت انتخاب شود از مثلث صلب $A_1P_{12}B_1$ می‌توان برای هدایت عضو واسطه بین دو موقعیت اول و دوم استفاده کرد. واضح است که تمام خطوط در صفحه AB دوران یکسان دارند یعنی زوایای دوران آنها یکسان است.



$$\angle A_1P_{12}A_2 = \angle B_1P_{12}B_2 = \theta_{12}$$
$$\angle A_1P_{12}a_{12} = \angle B_1P_{12}b_{12} = \theta_{12}/2$$

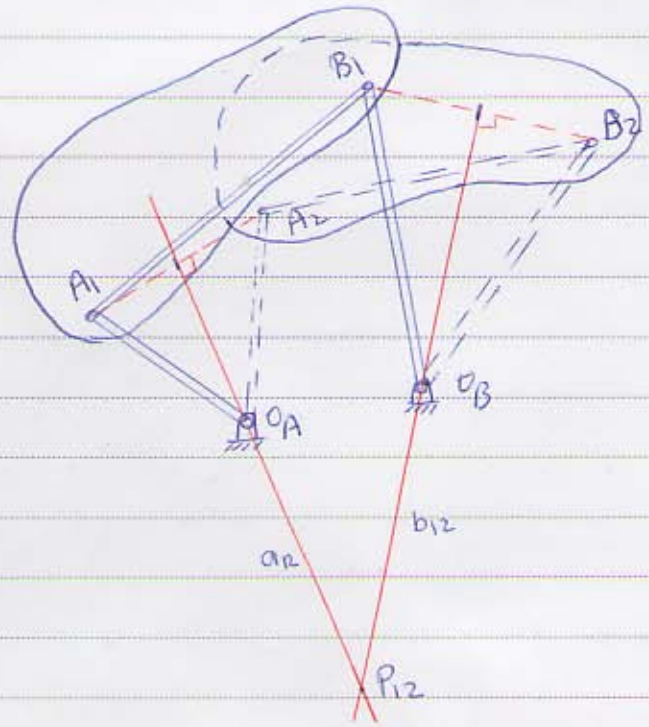
مسئله: مکانیزم چهار میله‌ای طراحی کنید که جسم صلب را از ① به ② در صفحه منتقل نماید.

حل: الف- دو نقطه دلخواه A و B را روی جسم صلب انتخاب نمایید و موقعیت آنها را در حالت ① و ② مشخص کنید. (∞^2 ممکن) (∞^2 ممکن)

ب- عمودمنصف‌های A_1A_2 و B_1B_2 را که به ترتیب a_{12} و b_{12} نام دارند را رسم کنید.

پ- تقاطع O_A را روی عمودمنصف a_{12} و O_B را روی عمودمنصف b_{12} انتخاب نمایید. (∞^1) (∞^1)

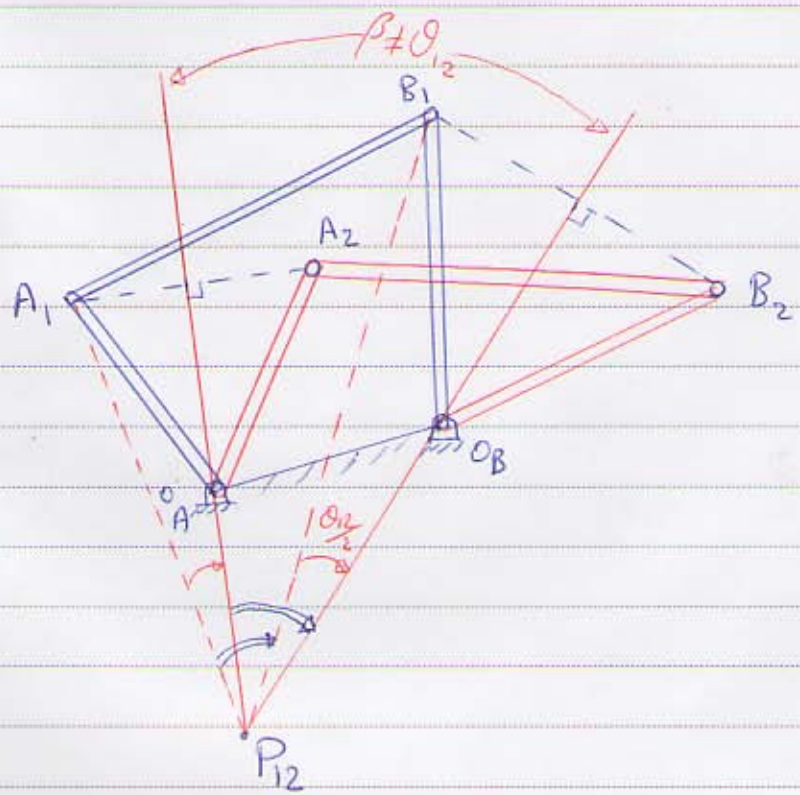
ت- مکانیزم $O_AA_1B_1O_B$، مکانیزم مورد نظر است. انتخاب ∞^6 راه‌حل، عدد $\bar{T}$ در پیشکاری حائز اهمیت است.



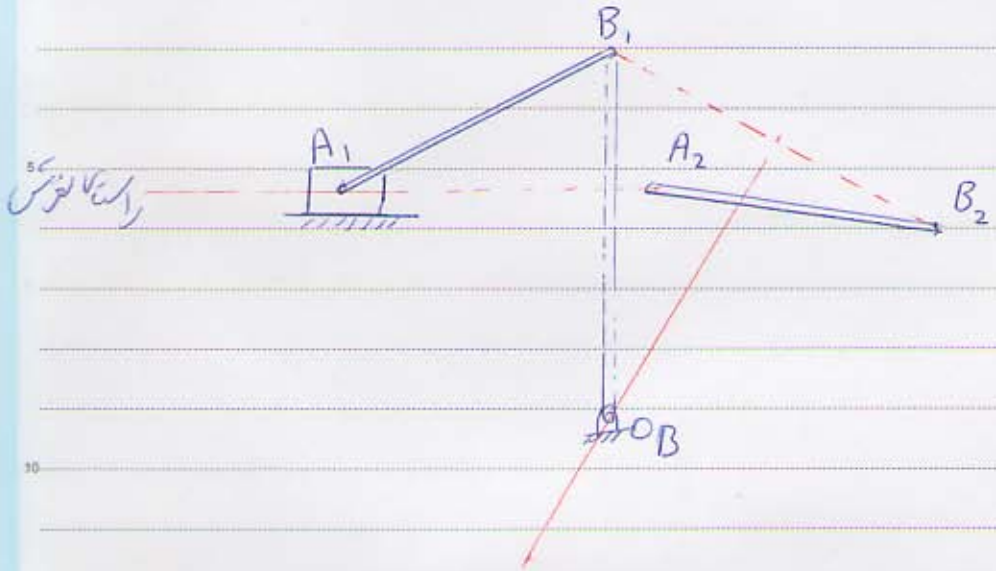
قضیه :

الف - در مکانیزم چهار میله ای عضو ورودی (۲) و خروجی (۴) از قطب دوران تحت زاویه ی θ_2 برابر با 180° اختلاف دیده می شوند. (زاویه ی θ_2 برابر مربوط به شکل زیر) و زاویه ی با اختلاف 180° موقعی اتفاق می افتد که O_A یا O_B بر قطب دوران و در امتداد a_{12} یا b_{12} انتخاب شوند)

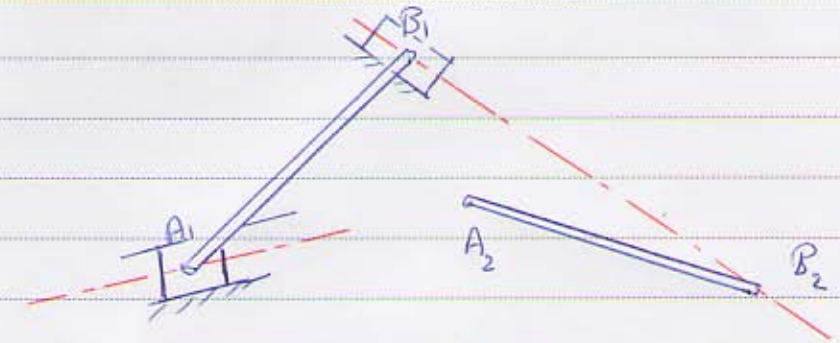
ب - در مکانیزم چهار میله ای عضوهای واسطه (۳) و زمین (۱) از قطب دوران تحت زاویه ی θ_2 برابر با 180° اختلاف دیده می شوند



مسئله: مطلوبست طراحی یک مکانیزم که میله AB را از وضعیت ۱ به ۲ ببرد و نقطه A بر روی یک مسیر مستقیم حرکت نماید.



مسئله: مطلوبست طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای که میله AB را از موضعیت ① به ② ببرد و نقاط A و B بر روی یک مسیر مستقیم حرکت نمایند.



مسئله M.G. با سه نقطه دقت:

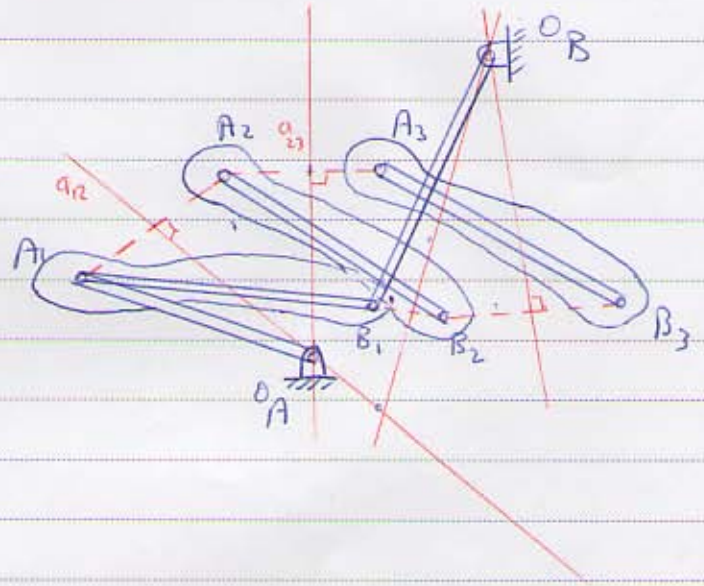
مطلوبست طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای که جسم صلب را از سه موقعیت صفحه‌ای عبور دهد.

حل: الف - انتخاب نقاط دلخواه A و B از جسم و تعیین A_1B_1 ، A_2B_2 ، A_3B_3

ب - رسم عمودمنصف‌های A_1A_2 ، A_1A_3 ، تعیین نقطه O_A

ج - رسم عمودمنصف‌های B_1B_2 ، B_1B_3 ، تعیین نقطه O_B

د - مکانیزم $O_A A_1 B_1 O_B$ جواب است.

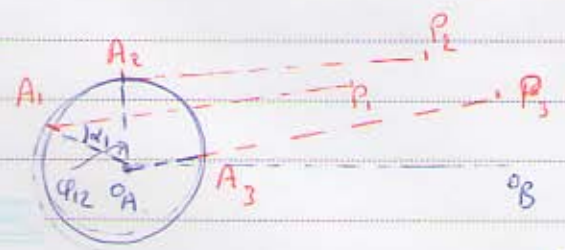


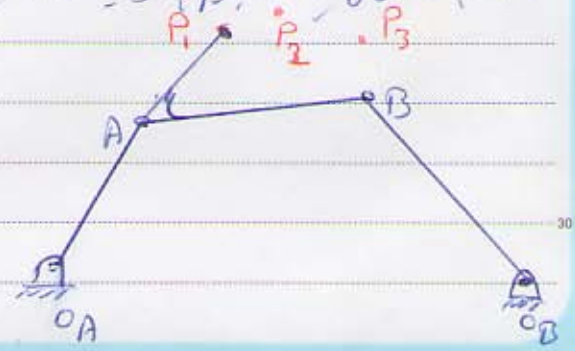
مسئله P.G.

در اینجا هدف طراحی مکانیزم چهار میله‌ای است که نقطه‌ای از عضو واسطه آن مسیر تعیین شده در صفحه را طی نماید. از آنجا که تعداد پارامترهای طراحی محدود است تولید چنین مسیری در حالت کلی غیرممکن به نظر می‌رسد. بنابراین، باید با تعداد محدودی از نقاط که به نقاط دقت شناخته می‌شوند منحنی را تقریب زد.

حل مسئله P.G. با ۳ نقطه دقت:

مطلوبست طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای که یک نقطه از عضو واسطه از نقاط P_1 ، P_2 و P_3 عبور نماید.





α : α_1 : (A_1P_1, O_AA_1) زاویه کلنگ با کوپلر

$\alpha_2 - \alpha_1$: زاویه کوپلر و کلنگ در وضعیت‌های نسبی (دوم و اول)

حل:

الف - نقاط O_A و O_B را در صفحه انتخاب نمایید.

ب - طول عضو ورودی را انتخاب کنید (کلنگ) و مسیری را که A طی می‌کند (دایره‌ای با مرکز O_A و شعاع عضو ورودی) را رسم کنید

پ - نقطه A_1 (یعنی موقعیت نقطه A در موقعیت متناظر با P_1) را روی این دایره انتخاب کنید. (در محل مناسب)

ت - با استفاده از طول AP (A_1P_1) موقعیت نقاط A_2 و A_3 را نیز مشخص نمایید (در صورت عدم تلاقی کمان A_1P_1 به مرکز P_2 با دایره کلنگ، می‌توان طول کلنگ و یا نقطه A را تغییر داد.)

ث - با تعیین A_1, A_2, A_3 و داشتن P_1, P_2, P_3، زاویه‌های α_1 و α_2 و α_3 را بدست آورید.

ج - برای طراحی از مکانیزم وارون استفاده نمایید یعنی عضو ثابت را، عضو واسطه قرار دهید.

در این مکانیزم وارون بقیه اعضای مکانیزم (که شامل زمین نیز می‌شود) به صورتی حرکت می‌کنند که همان حرکت نسبی بین اعضا مکانیزم برقرار باشد.

چ - مکانیزم وارون را از حالت ① به ② ببرید یعنی کلنگ را حول نقطه A_1 به اندازه $(\alpha_2 - \alpha_1)$ در جهت مخالف یعنی $-(\alpha_2 - \alpha_1)$، دوران دهید تا نقطه O'_A بدست آید.

ح - کمانی به مرکز O'_A و به شعاع O_AO_B رسم کنید (مکان هندسی نقطه O'_B)

خ - از آنجا که O_B و P_1 و P_2 و P_3 نقاط ثابتی در صفحه هستند فاصله آنها در مکانیزم اصلی و مکانیزم وارون تفاوتی نمی‌کند

از این رو به مرکز P_1 و به شعاع P_2O_B یک کمان رسم نمایید (مکان هندسی نقطه O'_B)

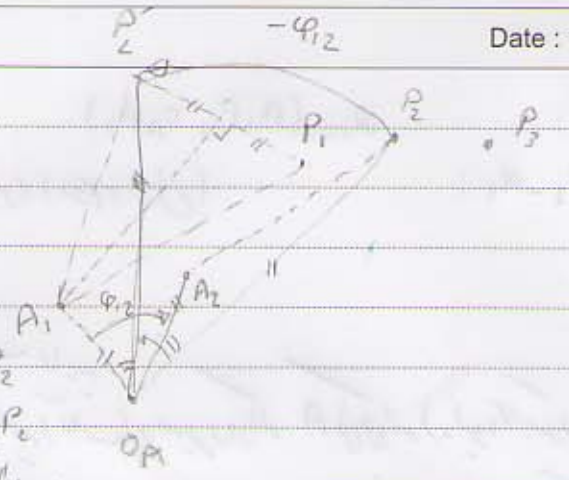
خ - تلاقی دو کمان نقطه O'_B را مشخص می‌کند

د - به طریق مشابه O''_B را بدست آورید.

ذ - از آنجایی که در مکانیزم وارون O_B و O'_B و O''_B حول نقطه ثابت B_1 دوران می‌کنند. عمل تلاقی عمودمنصف‌های $O_BO'_B$ و $O'_BO''_B$، نقطه B_1 را مشخص می‌کند.

ر - مکانیزم نهایی $O_AA_1B_1O_B$ با کوپلر A_1P_1 خواهد بود.

Subject : Date : 138 / /

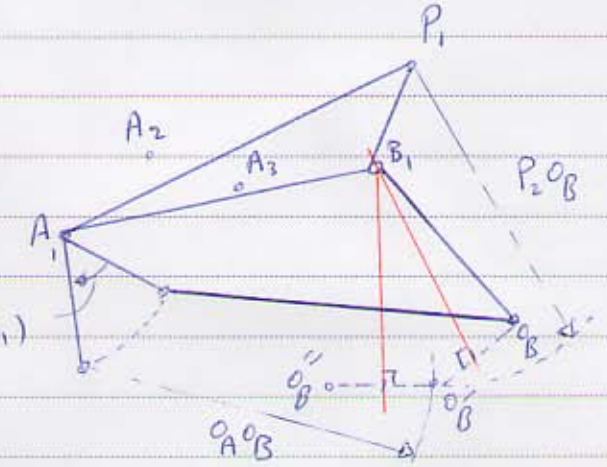


$\overset{\triangle}{A_1 O_A P_2'} = \overset{\triangle}{O_A A_2 P_2}$

$\begin{cases} O_A A_1 = O_A A_2 \\ O_A P_2' = O_A P_2 \end{cases} \rightsquigarrow A_1 P_2' = A_2 P_2$

$\angle A_1 O_A P_2' = \angle A_2 O_A P_2 \quad A_1 P_1 = A_2 P_2$

این بدان معنی است که اگر A_1 به اندازه φ_{12} دوران کند و به نقطه A_2 برود P_2 به A_2 نیز همان AP خواهد بود.



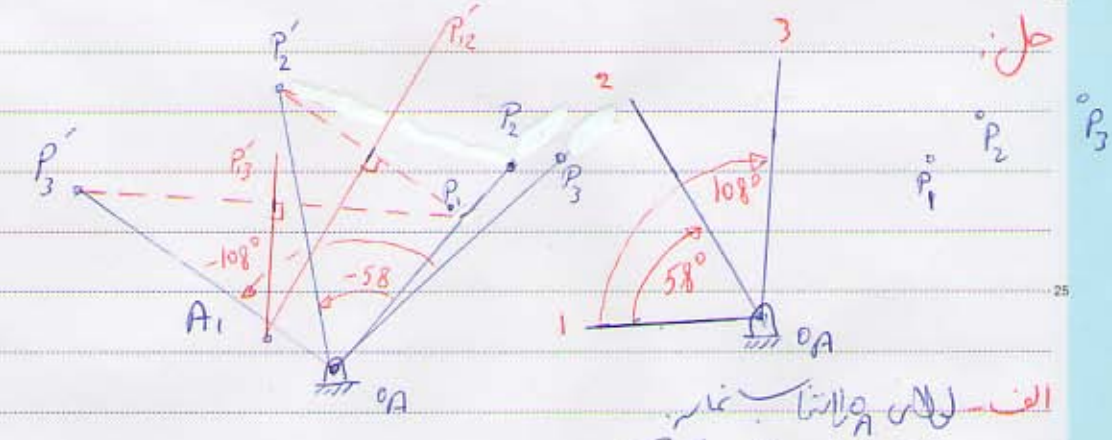
توجه: نکات مهم در روش ترسیمی، دقت در محاسبات ترسیمی است. به عنوان مثال، اگر محل تقاطع عمودمنصف که مکان B_1 را تعیین می‌کند وابسته به محاسبه OB و O_B'' است. و یا داشتن کمترین خطا، خواستهٔ طراح محقق نمی‌شود.

مسئله P.G. با سه نقطهٔ دقت و با زمان بندی معین:

در اینجا هدف، طراحی مکانیزم چهارمیله‌ای است که نقطه‌ای از عضو واسطه، مسیر تعیین شده در صفحه را در زمان‌های خاصی رسم نماید. با فرض سرعت زاویه‌ای ثابت لنگ، زمان‌های تعیین شده برای توالی معادل زاویه‌های لنگ عضو در نظر گرفته:

مثال: مکانیزم چهارمیله‌ای طراحی کنید که در آن متناظر با حرکت نقطه‌ای از عضو واسطه از P_1 به P_2، لنگ ورودی 58° (CW)، متناظر با حرکت مسیر از P_1 به P_3، لنگ ورودی به اندازهٔ 108° (CW) دوران نماید.

حل:



الف- لولای O_A را انتخاب نمایید.

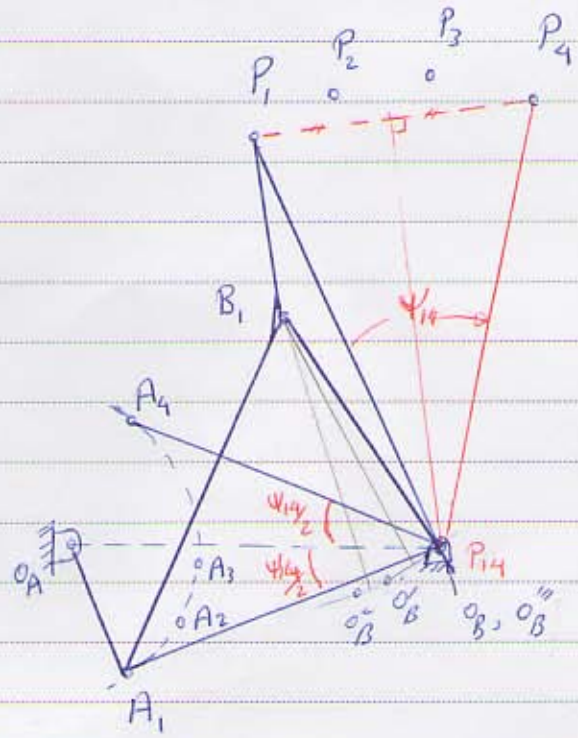
ب- خطوط $O_A P_2$ و $O_A P_3$ را رسم کنید.

ج- عضو ورودی را انتخاب کنید و طراحی را برای سه اصل معکوس سینماتیکی، از دید ناظر متصل به آن انجام دهید یعنی $O_A P_2$ را 58° درجه خلاف حرکت عقربه‌های ساعت (CCW) و $O_A P_3$ را 108° (CCW) حول O_A دوران دهید تا به ترتیب به نقاط P_2' و P_3' برسید.

ت- خطوط $P_2'P_1$ و $P_3'P_1$ را رسم کنید محل تقاطع عمود منصف های این دو پاره خط که به ترتیب P_{12}' و P_{13}' نام گذاری شده، نقطه A_1 یعنی موقعیت اولیه نقطه A است.

ث- بقیه مراحل همانند مسئله 3 نقطه دقت است. به بیان دیگر تفاوت این دو طراحی روش انتخاب نقطه A_1 است.

مسئله P.G با چهار نقطه دقت:



برای طراحی از مکانیزم چهار میله ای P.G. با چهار نقطه دقت از روش کاهش مواضع Point-position reduction استفاده می شود.

روش کاهش مواضع براین اصل استوار است که از سه نقطه دلخواه یک دایره عبور می کند. در اینجا می توان با انتخاب مناسب نقاط A_1 و O_B، یکی از مواضع O_B'، O_B'' و O_B''' را بر O_B منطبق نمود.

مراحل حل:

الف- انتخاب O_B را به نحوی انجام می دهیم که O_B''' بر آن منطبق شود. عمود منصف P_1P_{14} را رسم نمایید. نقاط روی این خط قطب نقطه P، از ① به ④ می باشد و زاویه ψ_{14} تغییر زاویه بیرو از موقعیت ① به ④ است.

ب- نقطه O_B بر روی قطب P_{14} انتخاب می شود. یعنی کوپلر با دوران ψ_{14} حول نقطه O_B از موقعیت ① به موقعیت ④ می رود. این بدان معنی است که نقاط A و B که متعلق به کوپلر است نیز با دوران ψ_{14} از موقعیت ① به ④ می رود.

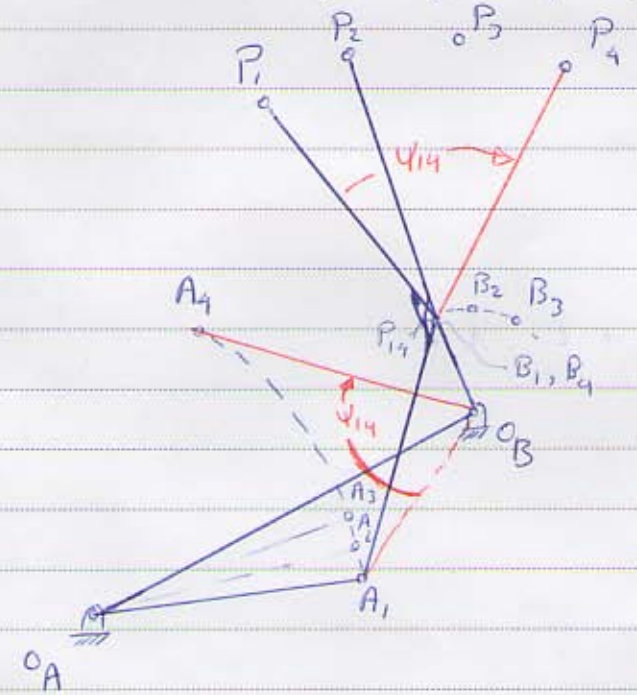
ب- با انتخاب نقطه O_A از نقطه O_B دو امتداد با زاویه $\pm\psi_{14}/2$ نسبت به خط $O_A O_B$ رسم نمایید.
نقاط A_1 و A_4 باید روی این دو خط واقع شوند (زیرا متعلق به کوپلر هستند و با دوران حول O_B به اندازه ψ_{14} از ① به ④ می‌رود)

پ- با انتخاب نقاط O_A و A_1، لینک AP نیز مشخص می‌گردد. موقعیت A_2 و A_3 نیز با کمانی که از نقطه O_A و به شعاع $O_A A_1 = O_A A_4$ و نیز کمانهایی که بصورت $P_2A_2 = P_3A_3 = P_1A_1$ زده می‌شوند مشخص می‌شوند

ت- نقاط O_B و O_B'' بر نقطه P_{14} واقع می‌شوند. با زمین قرار دادن کوپلر، تغییر مکانیزم دادن از ① به ② نقطه O_B' و از ① به ③ نقطه O_B'' به دست می‌آید. نقطه B_1 مرکز دایره‌ای با نقاط جفت O_B، O_B' و O_B'' خواهد بود.

طراحی دوم:

می‌توان به استفاده از قطب قرار دادن نقطه B_1 طراحی را انجام داد.



الف- نقطه P_{14} را بر روی عمود منصف خط P_1P_4 انتخاب نمایید. نقطه B_1 و B_4 را منطبق بر P_{14} انتخاب کنید. $\angle P_1P_{14}P_4 = \psi_{14}$

ب- از آنجا که مثلث ABP یک جسم صلب است از این رو $\angle A_1B_1P_1 = \angle A_4B_4P_4$
با داشتن نقاط B_1 و P_1، از نقطه B_1 یک راستای انتخابی رسم نمایید و روی آن خط نقطه A_1 دلخواه انتخاب کنید.

پ- نقطه A_4 را به صورت $\angle A_1B_1A_4 = \psi_{14}$ و $\overline{A_4B_1} = \overline{A_1B_1}$ به دست آورید

ت- نقطه O_A را بر روی عمود منصف A_1A_4، مقابل زاویه $\angle A_1B_1A_4$ انتخاب کنید.

ث- با رسم کمان $O_A A_1$، کمان هندی A_2 و A_3 تعیین می‌شود و کمانهای $A_2P_2 = A_1P_1$، $A_3P_3 = AP_1$، A_2 و A_3 به دست می‌آید

ج- با رسم مثلث های $\overset{\Delta}{A_1B_1P_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2P_2} = A_3B_3P_3 = \overset{\Delta}{A_4B_4P_4}$

نقاط B_2 و B_3 بدست می آید.

ح- مرکز دایره ای با نقاط متوالی B_1، B_2 و B_3 نقطه O_B را معرفی می کند.

حل مسئله F.G. با سه نقطه دقت:

مثال: مطلوب است طراحی یک مکانیزم چهارمیله ای که تابع $y = \sin x$ برای $0 \le x \le 90^\circ$ تولید نماید از سه نقطه دقت چبیشف استفاده نمائید. $\Delta\varphi = 120^\circ$ $\Delta\psi = 60^\circ$ در نظر بگیرید

$\varphi_1 \quad \psi_1$

$\varphi_2 \quad \psi_2$

$\varphi_3 \quad \psi_3$

$$x_j = x_0 + \frac{\Delta x}{2}\left[1 - \cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right]$$

$x_0 = 0$, $x_4 = 90^\circ$, $\Delta x = x_4 - x_0 = 90^\circ$

$y_0 = 0$ $y_4 = 1$

$x_1 = 0 + \frac{90}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi}{6}\right] = 6^\circ \rightarrow y_1 = \sin 6^\circ$

$x_2 = 0 + \frac{90}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 45^\circ$ $\quad y_2 = \sin 45^\circ$

$x_3 = 0 + \frac{90}{2}\left[1 - \cos\frac{5\pi}{6}\right] = 84^\circ$ $\quad y_3 = \sin 84^\circ$

$\varphi_j = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}(x_j - x_0)$ $\quad \Delta\varphi = \varphi_4 - \varphi_0 = 120^\circ$

$\Delta\psi = 60^\circ$

$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{120}{90}(6 - 0) = 8^\circ$ $\quad \varphi_2 - \varphi_1 = 52^\circ$

$\varphi_2 - \varphi_0 = \frac{120}{90}(45 - 0) = 60^\circ$ $\quad \varphi_3 - \varphi_1 = 104^\circ$

$\varphi_3 - \varphi_0 = \frac{120}{90}(84 - 0) = 112^\circ$

$$\psi_j = \psi_0 + \frac{\Delta\psi}{\Delta y}(y_j - y_0)$$

$$\psi_1 - \psi_0 = \frac{60}{1}(\sin 6 - 0) = 6.27^\circ$$

$$\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1 = 36.15^\circ$$

$$\psi_2 - \psi_0 = \frac{60}{1}(\sin 45 - 0) = 42.43^\circ$$

$$\psi_{13} = \psi_3 - \psi_1 = 53.4^\circ$$

$$\psi_3 - \psi_0 = \frac{60}{1}(\sin 84 - 0) = 59.67^\circ$$

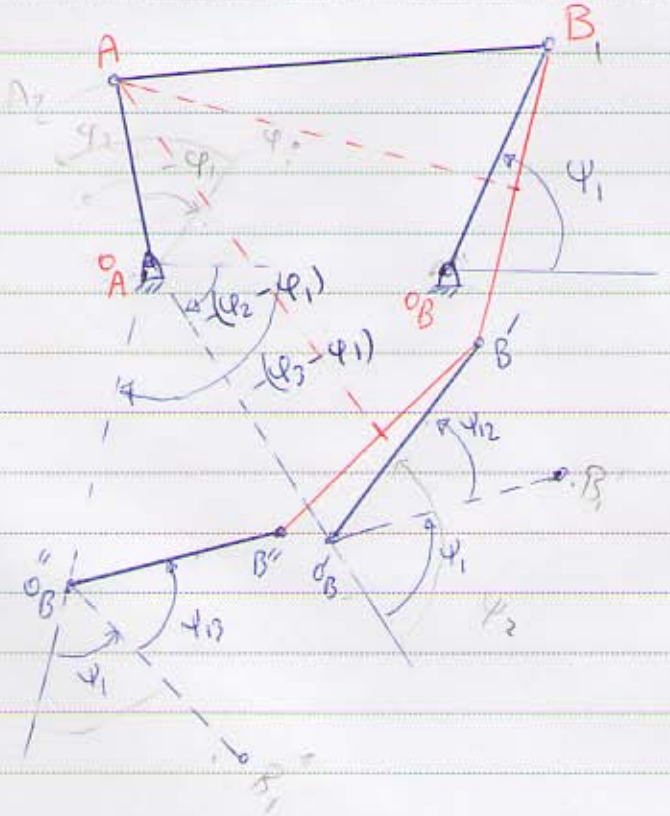
مراحل حل:

الف - نقاط O_A و O_B و طول پره و $O_B B$ را انتخاب نمایید. و مکانیزم را در حالت [1] (B) نشان دهید

ب - با استفاده از مکانیزم وارون، لنگ را به عنوان زمین اختیار نموده و مکانیزم را از حالت [1] به [2] جابجا می‌کنیم
برای این منظور کیت $O_A B$ را حول O_A به اندازه $-\varphi_2$ دوران داده تا نقطه O_B' بدست آید سپس
$O_B' B_{new}$ را حول O_B' به اندازه ψ_2 دوران می‌دهیم تا B' بدست آید.

پ - به طریق مشابه B'' را بدست می‌آوریم

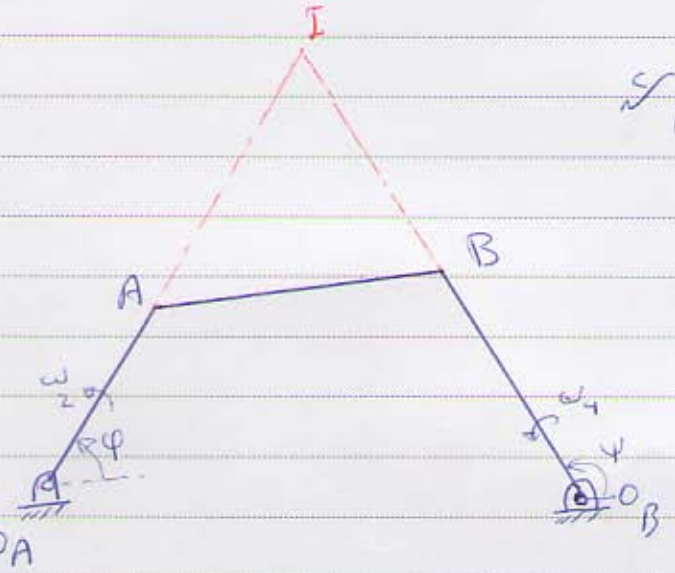
ت - دایره‌ای به مرکز A که نقاط B و B' و B'' بر روی محیط قرار دارند، نقطه A را معرفی می‌کند.



مسئله: مطلوب است طراحی مکانیزم چهارمیله‌ای اگر زاویه‌ی ورودی φ دارای سرعت زاویه‌ای ω_2 باشد و در این لحظه خروجی در زاویه‌ی ψ و سرعت زاویه‌ای ω_4 باشد.

حل:

فرض کنید مکانیزم روبرو جواب مسئله باشد



I نقطه 13 است.

$$v_A = O_A A\,\omega_2$$
$$v_B = O_B B\,\omega_4$$
$$\rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{O_B B\,\omega_4}{O_A A\,\omega_2}$$

$$v_A = IA\,\omega_3$$
$$v_B = IB\,\omega_3 \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{IB}{IA}$$

$$\frac{IB}{IA} = \frac{O_B B\,\omega_4}{O_A A\,\omega_2} \quad (*)$$

طراحی

الف- خط مفروض $O_A O_B$ را به صورت دلخواه انتخاب نمایید. از نقطه O_A زاویه‌ی φ و از نقطه O_B زاویه ψ را جدا نمایید تا نقطه I به دست آید.

ب- نقطه A را بر روی خط $O_A I$ انتخاب نمایید.

پ- از رابطه (*) با قرار دادن IA و $O_A A$، B به دست می‌آید.

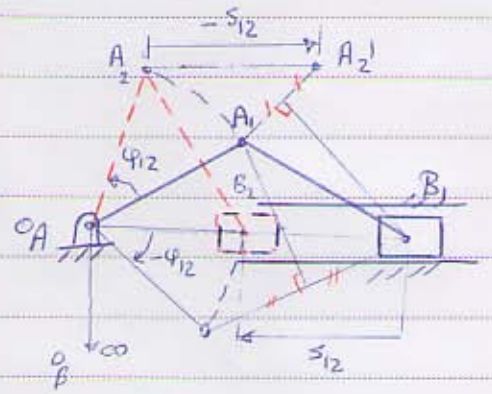
طراحی مکانیزم کلنگ لغزنده: (به روش ترسیمی):

مکانیزم کلنگ-لغزنده جهت تبدیل حرکت دورانی به حرکت لغزشی و یا بالعکس مورد استفاده قرار می‌گیرد.

الف- دو نقطه دقت:

موقعیت لغزنده	موقعیت کلنگ
S_1	φ_1
S_2	φ_2

$S_{12} = S_2 - S_1$ (با راستای علم) $\qquad \varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$



راه حل اول:

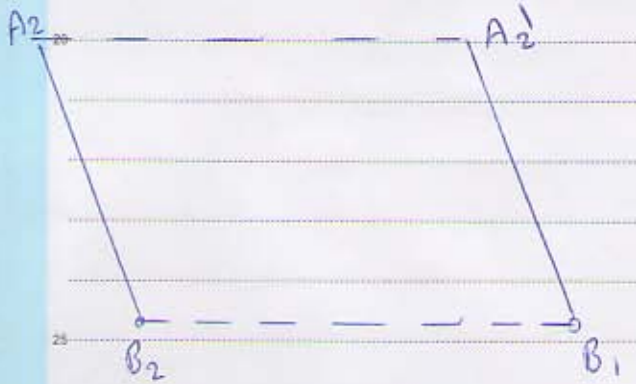
O_A انتخاب $\longrightarrow$ A_1 انتخاب $\xrightarrow{\angle A_1 O_A A_2 = \varphi_{12}}$ A_2 $\xrightarrow[\text{در راستای لغزش}]{-S_{12}}$ A_2' $\xrightarrow[A_1A_2']{\text{عمودمنصف}}$ B مکان هندسی

$O_A B_\infty$ در راستای لغزش

(شکل در حالت ∞ بار رسم شده است.)

اثبات:

باید نشان دهیم وقتی که $O_A A_1$ حول O_A به اندازه φ_{12} دوران می‌کند، B_1 به اندازه S_{12} جابجا می‌شود. بطور خلاصه اگر $\angle A_1 O_A A_2' = \varphi_{12}$ آنگاه $B_1B_2 = S_{12}$.



چهارضلعی $A_2A_2'B_1B_2$ را در نظر بگیرید.

$$\left.\begin{array}{l} A_2A_2' \parallel B_2B_1 \\ B_1A_2' = B_1A_1 = B_2A_2 \Rightarrow B_1A_2' = B_2A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

در اینجا متوازی‌الاضلاع است، با این اثبات آن را می‌توان گفت!

$$\Rightarrow B_1B_2 = A_2'A_2 = S_{12}$$

راه حل دوم: طراحی را می‌توان از B_1 آغاز کرد.

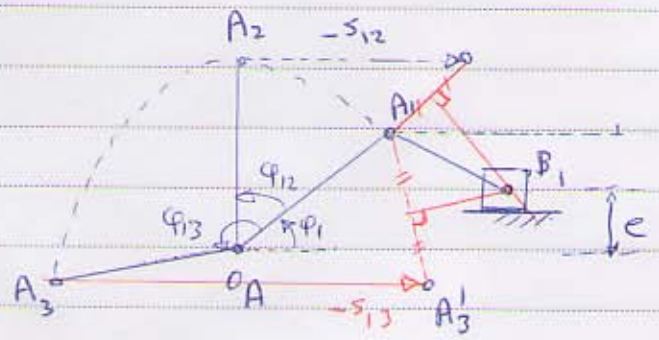
$B_1 \xrightarrow{S_{12}} B_2 \xrightarrow{\angle B_2 O_A B_2' = -\varphi_{12}} B_2' \xrightarrow[B_1B_2']{\text{عمودمنصف}}$ A_1 مکان هندسی

ب - سه نقطه دقت:

φ_1 ; φ_{12} s_{12}

φ_2 ; φ_{13} s_{13}

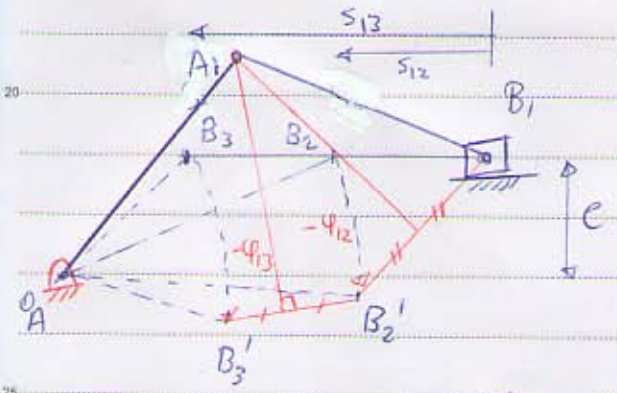
φ_3



راه حل اول:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{\varphi_{12}} A_2 \xrightarrow{-s_{12}} A_2' \\ A_1 \xrightarrow{\varphi_{13}} A_3 \xrightarrow{-s_{13}} A_3' \end{array}\right\} A_1A_3' \text{ و } A_1A_2' \text{ تلاقی عمودمنصف‌های} \rightarrow B_1 \text{ و } e = \checkmark$$

درصورتی که e معلوم باشد طراحی را از B شروع می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} B_1 \xrightarrow{s_{12}} B_2 \xrightarrow{\angle B_2 O_A B_2' = -\varphi_{12}} B_2' \\ B_1 \xrightarrow{s_{13}} B_3 \xrightarrow{\angle B_3 O_A B_3' = -\varphi_{13}} B_3' \end{array}\right\} \text{تلاقی عمودمنصف‌های } B_1B_3' \text{ و } B_1B_2' \rightarrow A_1 \checkmark$$

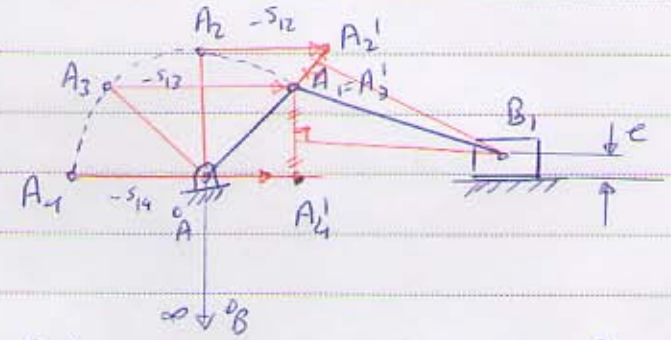
ج- چهار نقطهٔ دقت

φ_{12} s_{12}

φ_{13} s_{13}

φ_{14} s_{14}

حل:



به کمک روش کاهش مواضع مسئله را حل می‌کنیم

$A_1 = A_3'$

روی ضلع $O_A O_B$ زاویهٔ $-\frac{\varphi_{13}}{2}$ را جدا نموده و روی یک ضلع دیگر این زاویه A_1 را چنان انتخاب کرده که ضلع روبرو به زاویه $-\frac{\varphi_{13}}{2}$ به مقدار $\frac{s_{13}}{2}$ باشد.

$A_1 \xrightarrow{\varphi_{12}} A_2 \xrightarrow{-s_{12}} A_2'$

$A_1 \xrightarrow{\varphi_{13}} A_3 \xrightarrow{-s_{13}} A_3' = A_1$

محل B_1، تلاقی عمود منصف A_1A_2' و A_1A_4' خواهد بود.

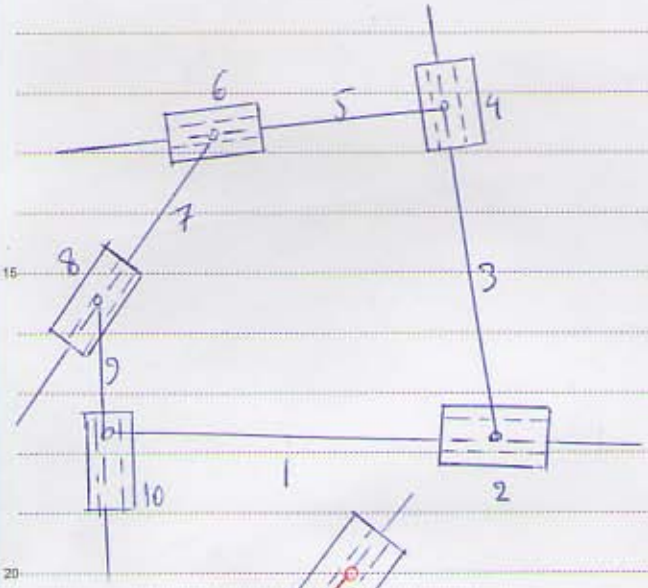
$A_1 \xrightarrow{\varphi_{14}} A_4 \xrightarrow{-s_{14}} A_4'$

طراحی مکانیزم‌های چهارمیله‌ای به روش تحلیلی:

برای حل یک مسئله طراحی چهارمیله‌ای به روش تحلیلی باید ابعاد مکانیزم را به یک دسته معادله و روابط ارتباط داد.

روش‌های کترسی یا هندسی، دارای محدودیت‌هایی هستند. خطاهای سیستماتیک که در برخی موارد ممکن است زیاد باشد و تعداد انتخاب‌های آزاد برای کسب نتیجه رضایت‌بخش از آن جمله هستند.

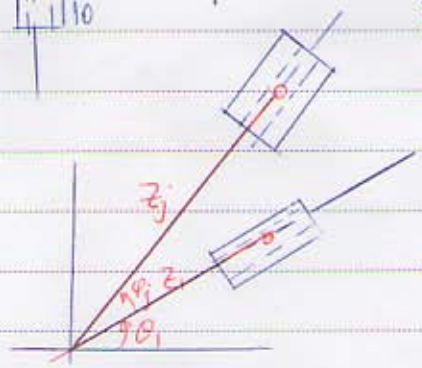
در روش‌های جبری که برای حل رایانه‌ای مناسب هستند، مسئله را فرموله کرده و بدون نیاز به تکرار فرمول‌بندی و یا تغییر پارامترهای مسئله، می‌توان راه‌حل جدیدی را ایجاد کرد. مزیت اصلی این روش دقت بالا و قابلیت تکرار آن است.



یادآوری:

زنجیره سینماتیکی:

یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از ارتباط چندین عضو صلب که با ثابت نمودن یکی از اعضا، یک مکانیزم حاصل می‌شود.



$$\vec{z}_1 = z_1 e^{i\theta_1}$$

$$\vec{z}_j = z_j e^{i\theta_j}$$

$$= z_j e^{i(\theta_1+\varphi_j)}$$

$$= \rho_j z_1 e^{i\theta_1} e^{i\varphi_j}$$

$\rho_j = \frac{z_j}{z_1}$ ضریب افزایش طول

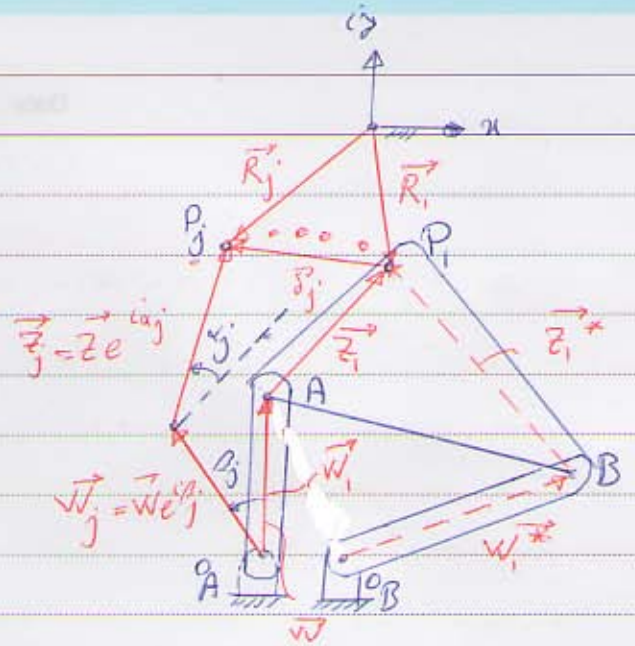
$e^{i\varphi_j}$: اپراتور (عملگر) دوران

$$\vec{z}_j = \vec{z}_1 \rho_j e^{i\varphi_j}$$

حل مسئله P.G. و M.G. به روش تحلیلی:

اگر یک مکانیزم چهارمیله‌ای را از موقعیت $\boxed{1}$ به موقعیت $\boxed{j}$ ببریم میتوان یک سیکل بسته برای

حالت $\boxed{1}$ ...



$\vec{w}_1$: بردار لنگ در موقعیت $\boxed{1}$

$\vec{z}_1$: بردار کوپلر در موقعیت $\boxed{1}$

β_j : تغییر زاویه لنگ از موقعیت $\boxed{1}$ به موقعیت $\boxed{j}$

α_j : " " " " " " کوپلر

$\vec{\delta}_j$: بردار تغییر مکان R از موقعیت $\boxed{1}$ به $\boxed{j}$ (P_1 به P_j)

$(\vec{\delta}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_1)$

$$\vec{w}_1 + \vec{z}_1 + \vec{\delta}_j - \vec{z}_j - \vec{w}_j = 0$$

$$\begin{cases} \vec{w}_j = \vec{w} e^{i\beta_j} \\ \vec{z}_j = \vec{z} e^{i\alpha_j} \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{w}_1 (e^{i\beta_j} - 1) + \vec{z}_1 (e^{i\alpha_j} - 1) = \vec{\delta}_j} \quad (1)$$

کتیب مجری

برای قسمت (طرف) راست مکانیزم نیز می‌توان نوشت:

$$\boxed{\vec{w}_1^* (e^{i\beta_j} - 1) + \vec{z}_1^* (e^{i\alpha_j} - 1) = \vec{\delta}_j} \quad (2)$$

(از این به بعد $\vec{w}_1 \rightarrow \vec{w}$ ، ...)

به وسیله روابط (1) و (2) میتوان مسایل P.G. و M.G. را نمود

مسئله P.G. :
- داده‌ها : $\vec{\delta}_j, \beta_j$
- مجهولات : $\vec{w}, \vec{z}, \alpha_j$

مسئله M.G. :
- داده‌ها : $\vec{\delta}_j, \alpha_j$
- مجهولات : $\vec{w}, \vec{z}, \beta_j$

مسئله M.G.:

حل مسئله با ۲ نقطه دقت، $\vec{\delta}_2$ و α_2 ✓:

$$\vec{W}(e^{i\beta_2}-1)+\vec{Z}(e^{i\alpha_2}-1)=\vec{\delta}_2$$

مجهولات در اینجا، $\vec{W}$، $\vec{Z}$ و β_2 (5 تا) هستند با داشتن دو معادله جبری فوق، که انتخاب وجود دارد.

حل مسئله با ۳ نقطه دقت:

$\vec{\delta}_2$ و $\vec{\delta}_3$ و α_2 و α_3 ✓

$$\begin{cases}\vec{W}(e^{i\beta_2}-1)+\vec{Z}(e^{i\alpha_2}-1)=\vec{\delta}_2\\ \vec{W}(e^{i\beta_3}-1)+\vec{Z}(e^{i\alpha_3}-1)=\vec{\delta}_3\end{cases}$$

4 معادله جبری و 6 مجهول ($\vec{W}$ و $\vec{Z}$ و β_2 و β_3)، از این رو دو انتخاب داریم:

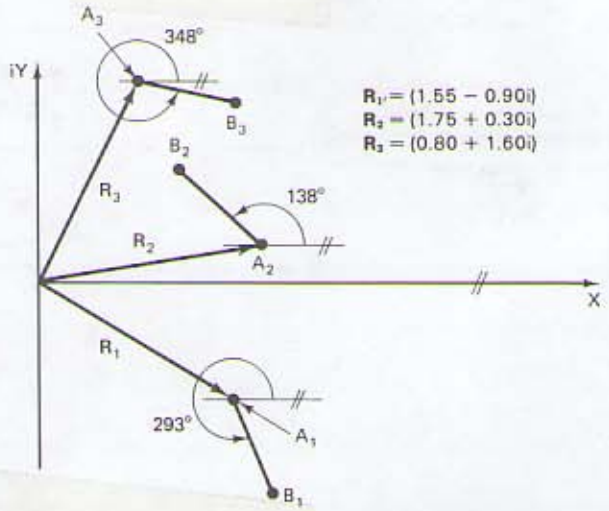
حل به روش کرامر (با انتخاب β_2 و β_3 دلخواه حل خواهد شد.)

$$\vec{W}=\frac{\begin{vmatrix}\vec{\delta}_2 & e^{i\alpha_2}-1\\ \vec{\delta}_3 & e^{i\alpha_3}-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1\\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1\end{vmatrix}}\quad(*)\qquad \vec{Z}=\frac{\begin{vmatrix}e^{i\beta_2}-1 & \vec{\delta}_2\\ e^{i\beta_3}-1 & \vec{\delta}_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1\\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1\end{vmatrix}}\quad(**)$$

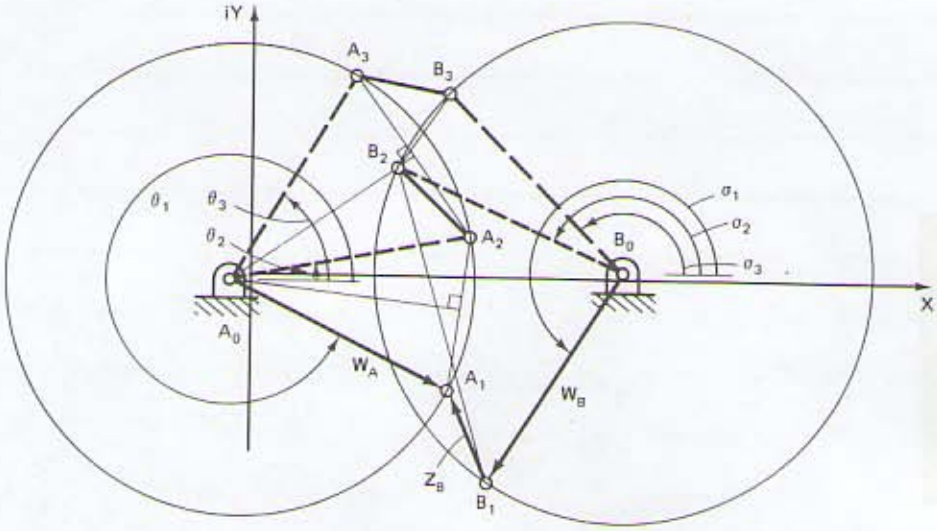
به طریق مشابه می‌توان $\vec{W}^*$ و $\vec{Z}^*$ را بدست آورد.

مثال: مطلوبست طراحی یک مکانیزم چهارمیله‌ای که جسم صلب (میله AB) از موقعیت‌های 1، 2 و 3 عبور دهد.

حل:



(a)



Note $Z_A = 0 + 0i$

(b)

Figure 2.58 Three-position motion synthesis of a four-bar linkage (a) three prescribed coplanar positions of plane AB; (b) graphical construction.

ابتدا مسئله را به روش ترسیمی حل می‌کنیم.

در روش تحلیلی می‌توان نقطهٔ P را بر نقطه از جسم در نظر گرفت، برای اینکه جوابهای تحلیلی و ترسیمی با یکدیگر مقایسه شود. نقطهٔ P را بر نقطهٔ A منطبق می‌گیریم و انتخابهای خود بر جوابهای ترسیمی قرار می‌دهیم

$\vec{R}_1 = 1.56 - 0.9i$

$\vec{R}_2 = 1.75 + 0.3i$

$\vec{R}_3 = 0.8 + 1.6i$

$(P = A) \quad \vec{z} = 0$

$\vec{\delta}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = 0.2 + 1.2i$

$\vec{\delta}_3 = \vec{R}_3 - \vec{R}_1 = -0.75 + 2.5i$

$\alpha_2 = 138^\circ - 293^\circ \underset{+360}{=} +205^\circ$

$\alpha_3 = 348 - 293 = 55^\circ$

برای تطابق حل تحلیلی و ترسیمی برای انتخاب β_2 و β_3، θ_1 و θ_2 و θ_3 (زاویهٔ کنک) از شکل اندازه‌گیری شده است:

$\theta_1 = 330^\circ$ $\qquad \beta_2 = 9 - 330 = -321^\circ = 39^\circ$

$\theta_2 = 9^\circ$ $\qquad \beta_3 = 64 - 330 = 94^\circ$

$\theta_3 = 64^\circ$

برای کنک مالکسمت چپ از معادلات (*) و (**) داریم:

$$\vec{W} = \frac{\vec{\delta}_2 (e^{i\alpha_3} - 1) - \vec{\delta}_3 (e^{i\alpha_2} - 1)}{(e^{i\beta_2} - 1)(e^{i\alpha_3} - 1) - (e^{i\beta_3} - 1)(e^{i\alpha_2} - 1)} = 1.55 - 0.9i = 1.792 \angle 329.9^\circ$$

$$\vec{z} = \frac{\vec{\delta}_3 (e^{i\beta_2} - 1) - \vec{\delta}_2 (e^{i\beta_3} - 1)}{(e^{i\beta_2} - 1)(e^{i\alpha_3} - 1) - (e^{i\beta_3} - 1)(e^{i\alpha_2} - 1)} = 0$$

برای کیک مثبت راست داریم:

$$\begin{cases} \vec{w}^*(e^{i\psi_2}-1)+\vec{z}^*(e^{i\alpha_2}-1)=\vec{\delta}_2 \\ \vec{w}^*(e^{i\psi_3}-1)+\vec{z}^*(e^{i\alpha_2}-1)=\vec{\delta}_3 \end{cases}$$

با داشتن α_2، α_3، δ_2 و δ_3 و انتخاب ψ_2 و ψ_3 (به روش ترکیبی بدست آمده) به صورت زیر است:

$\sigma_1 = 235^\circ$

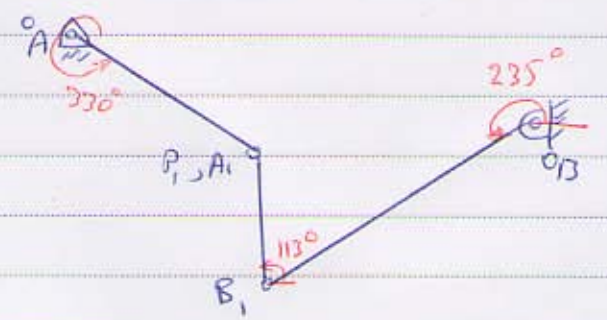
$\sigma_2 = 156^\circ$ $\rightarrow \psi_2 = 156 - 235 = 281^\circ$

$\sigma_3 = 135^\circ$ $\psi_3 = 135 - 235 = 260^\circ$

$w^* = 2\angle 235.3^\circ$

$z^* = 0.79\angle 113^\circ = \overrightarrow{P_1A}$

با جایگذاری در دستگاه بالا داریم:



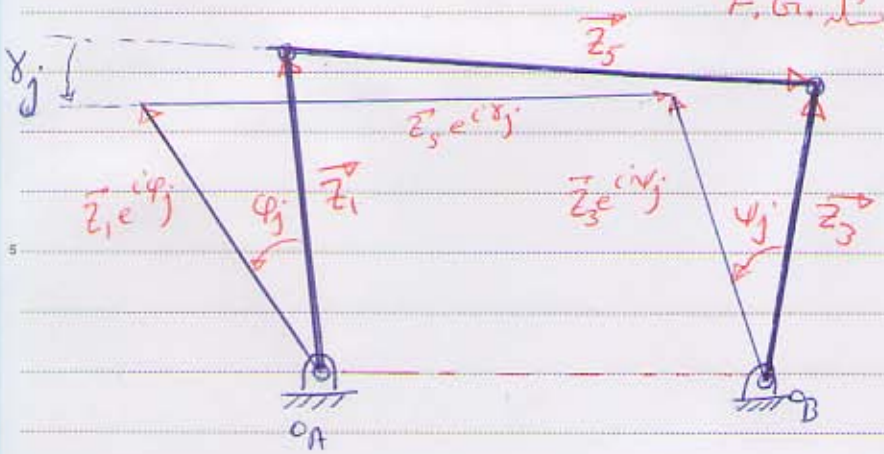
$$\vec{w}(e^{i\beta_j}-1)+\vec{z}(e^{i\alpha_j}-1)=\vec{\delta}_j$$

حل شد M.G.:

حل شد P.G.:

تعداد موقعیت $j=2,3,\dots n$	تعداد معادلات جبری	تعداد مجهولات	تعداد انتخاب	تعداد راه حل
2	2	$5(\vec{w},\vec{z},\beta_2^{(\alpha_2)})$	3	∞^3
3	4	$6(\text{فوق}+\beta_3^{(\alpha_3)})$	2	∞^2
4	6	$7(\text{فوق}+\beta_4^{(\alpha_4)})$	1	∞
5	8	$8(\text{فوق}+\beta_5^{(\alpha_5)})$	—	محدود

طراحی مکانیزم چهارمیله‌ای حل شده F.G.



$$\vec{z}_1 + \vec{z}_5 - \vec{z}_3 + \vec{z}_3 e^{i\psi_j} - \vec{z}_5 e^{i\gamma_j} - \vec{z}_1 e^{i\varphi_j} = 0$$

$$\boxed{\vec{z}_1 (e^{i\varphi_j} - 1) + \vec{z}_5 (e^{i\gamma_j} - 1) - \vec{z}_3 (e^{i\psi_j} - 1) = 0}$$

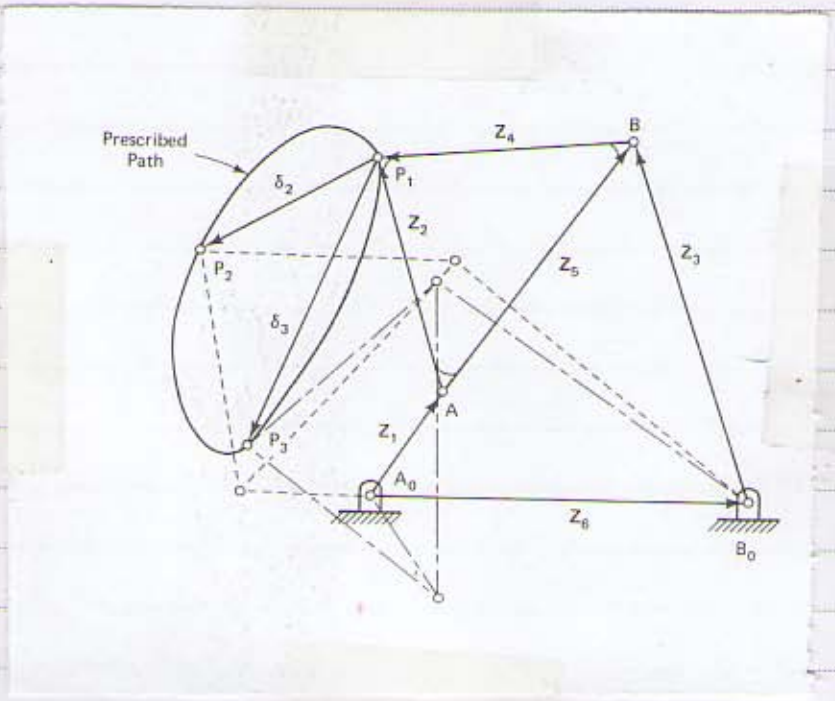
معلومات φ_j, ψ_j ،

مجهولات: $\vec{z}_1, \vec{z}_5, \vec{z}_3$

تعداد وضعیت	تعداد معادلات جبری	مجهولات	انتخاب	تعداد راه‌حل
2	2	$7(\vec{z}_1, \vec{z}_5, \vec{z}_3, \gamma_2)$	5	∞^5
3	4	8 (فوق + γ_3)	4	∞^4
4	6	9 (فوق + γ_4)	3	∞^3
5	8	10 (فوق + γ_5)	2	∞^2
6	10	11 (فوق + γ_6)	1	∞^1
7	12	12 (فوق + γ_7)	—	محدود

غلط

مثال: مطلوب است طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای P.G. برای ایجاد مسیر بیضی شکل به نحوی که



$\vec{\delta}_2 = -1.4 - 0.76\, i$

$\vec{\delta}_3 = -1 - 2.3\, i$

$\varphi_2 = 126^\circ \quad , \quad \varphi_3 = 252^\circ$

حل:

برای لینک‌های سمت چپ داریم:

$$\vec{z}_1 (e^{i\varphi_j} - 1) + \vec{z}_2 (e^{i\gamma_j} - 1) = \vec{\delta}_j$$

$$\begin{cases} \vec{z}_1 (e^{i\varphi_2} - 1) + \vec{z}_2 (e^{i\gamma_2} - 1) = \vec{\delta}_2 \\ \vec{z}_1 (e^{i\varphi_3} - 1) + \vec{z}_2 (e^{i\gamma_3} - 1) = \vec{\delta}_3 \end{cases}$$

معلومات: $\varphi_2, \varphi_3, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3$

مجهولات: $\gamma_2, \gamma_3, \vec{z}_1, \vec{z}_2$

γ_2 و γ_3 را انتخاب نموده تا دستگاه به صورت خطی شود:

$$\begin{cases} \gamma_2 = -6^\circ \\ \gamma_3 = 37^\circ \end{cases}$$

$$\vec{z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{\delta}_2 & e^{i\gamma_2} - 1 \\ \vec{\delta}_3 & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\varphi_2} - 1 & e^{i\gamma_2} - 1 \\ e^{i\varphi_3} - 1 & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}} = 1.0017 \angle 53.8^\circ \qquad \vec{z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\varphi_2} - 1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\varphi_3} - 1 & \vec{\delta}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\varphi_2} - 1 & e^{i\gamma_2} - 1 \\ e^{i\varphi_3} - 1 & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}} = 1.897 \angle 105.9^\circ$$

به طور مشابه برای لینک های سمت راست، $\vec{z}_3$ ، $\vec{z}_4$ بدست می آید.

اعداد:

$\psi_2 = 33^\circ$

$\psi_3 = 37^\circ$

$\vec{z}_3 = 2.985 \angle 108.4^\circ$

$\vec{z}_4 = 2.005 \angle -174.6^\circ$

$\vec{z}_5 = \vec{z}_2 - \vec{z}_4 = 2.497 \angle 53.7^\circ$

$\vec{z}_6 = \vec{z}_1 + \vec{z}_5 - \vec{z}_3 = 3.011 \angle -0.2^\circ$

مثال: همانطور که شکل زیر نشان می دهد در یک صندلی آرایشگاه [redacted] یک بازوی حرکت پا و سر کاربران صندلی را به صورت کنترل می کند (دقت کنید که یک رابطه غیرخطی برای موقعیت زاویه ای بین دو عضو برقرار است). برای این منظور از یک مکانیزم شش میله ای ولت استفاده می شود که در واقع دو مکانیزم چهار میله ای است که به صورت سری متصل شده اند.

برای مکانیزم چهار میله ای اول که F.G. است می خواهیم:

$\varphi_2 = 50^\circ$, $\psi_2 = 22.5^\circ$

$\varphi_3 = 75^\circ$, $\psi_3 = 45^\circ$

و برای چهار میله ای دوم که آن نیز F.G. است می خواهیم:

$\varphi_2 = 22.5^\circ$ $\psi_2 = 40^\circ$

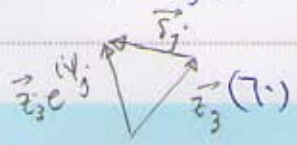
$\varphi_3 = 45^\circ$ $\psi_3 = 70^\circ$

حل: داریم:

$$\begin{cases} \vec{z}_1(e^{i\varphi_2}-1) + \vec{z}_5(e^{i\gamma_2}-1) = \vec{z}_3(e^{i\psi_2}-1) = \vec{\delta}_2 \\ \vec{z}_1(e^{i\varphi_3}-1) + \vec{z}_5(e^{i\gamma_3}-1) = \vec{z}_3(e^{i\psi_3}-1) = \vec{\delta}_3 \end{cases}$$

معلومات $\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$

مجهولات $\vec{z}_1, \vec{z}_5, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3, \gamma_2, \gamma_3$



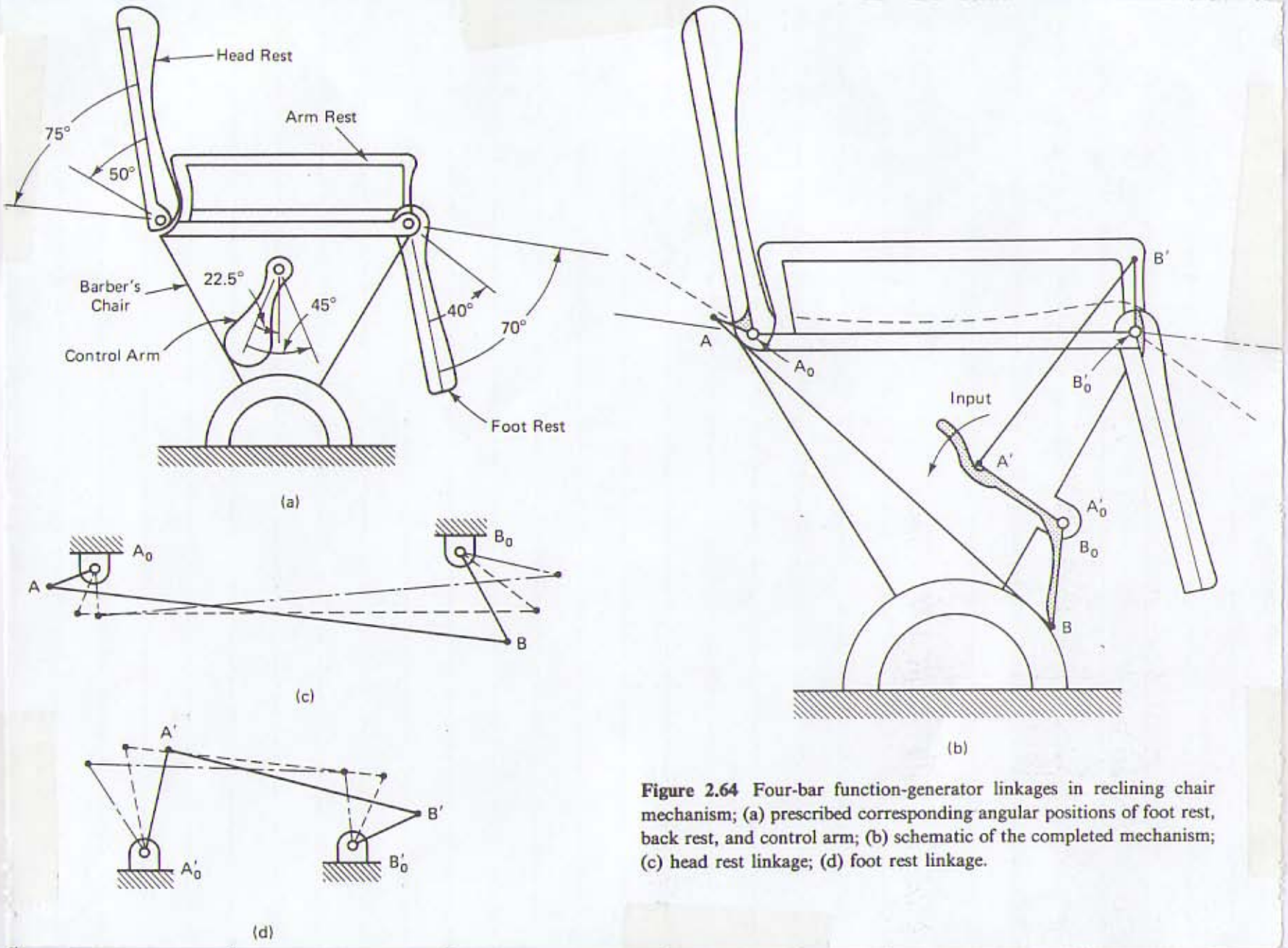
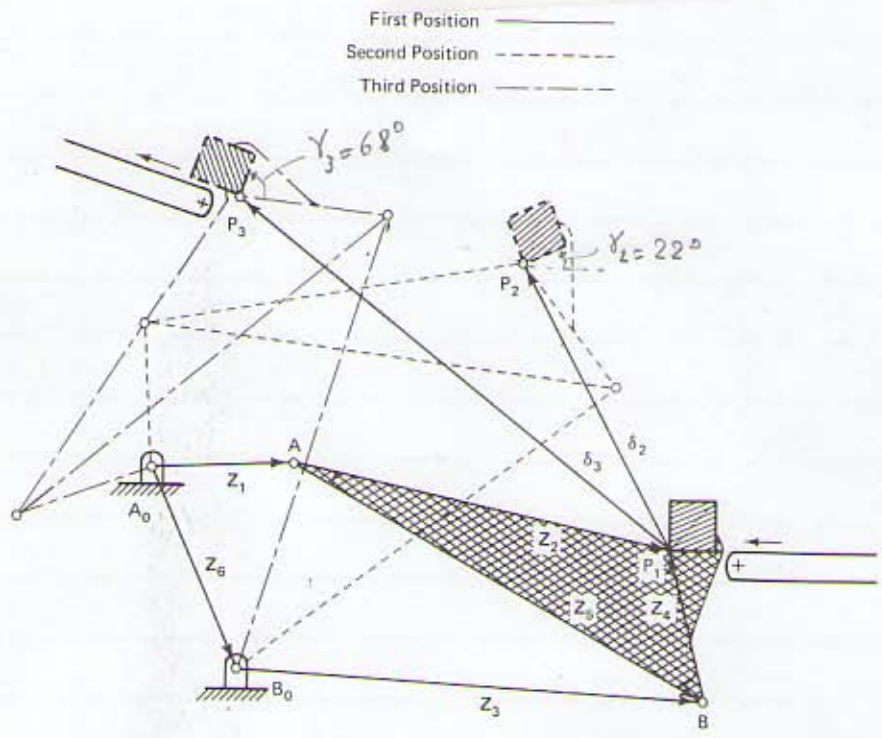


Figure 2.64 Four-bar function-generator linkages in reclining chair mechanism; (a) prescribed corresponding angular positions of foot rest, back rest, and control arm; (b) schematic of the completed mechanism; (c) head rest linkage; (d) foot rest linkage.

Subject :

Date : 138 / /



(b)

Figure 2.62 (continued)

در چهار میله‌ای اول با انتخاب:

$\vec{\delta}_2 = -0.07 + 0.4i \qquad \gamma_2 = 7^\circ$

$\vec{\delta}_3 = -0.3 + 0.7i \qquad \gamma_3 = 12^\circ$

جواب می‌آوریم:

$\vec{z}_1 = 0.466 \angle -85^\circ$

$\vec{z}_2 = 3.755 \angle 60^\circ$

$\vec{z}_3 = 1.04 \angle 15.5^\circ$

$\vec{z}_4 = 0.97 \angle -74.8^\circ$

$\vec{z}_5 = 4.5 \angle 68.9^\circ$

$\vec{z}_6 = 3.5 \angle 79^\circ$

در چهار میله‌ای دوم با انتخاب

$\vec{\delta}_2 = -0.07 + 0.4i \qquad \gamma_2 = 8^\circ$

$\vec{\delta}_3 = -0.3 + 0.7i \qquad \gamma_3 = 13^\circ$

بدست می‌آوریم:

$\vec{z}_1 = 0.99 \angle 13.25^\circ$

$\vec{z}_2 = 0.73 \angle -65.9^\circ$

$\vec{z}_3 = 0.68 \angle -39.9^\circ$

$\vec{z}_4 = 1.65 \angle 94.7^\circ$

$\vec{z}_5 = 2.35 \angle -79.3^\circ$

$\vec{z}_6 = 1.87 \angle -61.9^\circ$

مثال: مطلوب است طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای که جعبه‌ای را از یک نوار نقاله به نوار نقاله دوم منتقل نماید و حالت میانی ② نیز عبور دهد. (شکل روبرو)

حل: از داده‌های شکل داریم: (داده شده)

$\vec{\delta}_2 = -6 + 11i \qquad \gamma_2 = 22^\circ$

$\vec{\delta}_3 = -17 + 13i \qquad \gamma_3 = 68^\circ$

با داشتن دو انتخاب خواهیم داشت:

انتخاب $\begin{cases} \varphi_2 = 90^\circ \\ \varphi_3 = 138^\circ \end{cases}$ انتخاب $\begin{cases} \psi_2 = 40^\circ \\ \psi_3 = 73^\circ \end{cases}$

$\vec{z}_1 = 5.775 \angle 4.8^\circ$

$\vec{z}_2 = 15.02 \angle -13.4^\circ$

$\vec{z}_3 = 18.4 \angle -2.06^\circ$

$\vec{z}_4 = 6.12 \angle 103.4^\circ$

$\vec{z}_5 = 18.6 \angle -30.4^\circ$

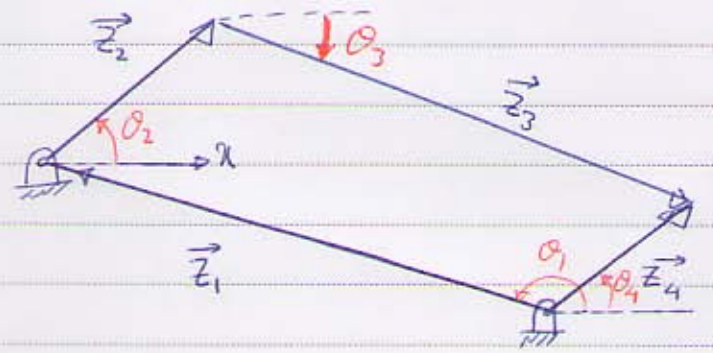
$\vec{z}_6 = 8.95 \angle -67.6^\circ$

$\begin{array}{l} \quad\ \ R \quad\ \ i \\ O_A = (0, 0) \\ O_B = (3.41, -8.28) \\ A = (5.76, 0.98) \\ B = (21.79, -8.94) \\ (?)\ P = (20.37, -2.99) \end{array}$

FREUDENSTEIN'S EQUATION

معادله فریدن اشتاین:

فریدن اشتاین مسئله F.G.B را با سه نقطه دقت به صورت کامل حل کرده و جوابها را حاصل به صورت روابط تحلیلی ارائه نموده است:



$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 - \vec{z}_4 = 0 \qquad (2.59)$$

با قرار دادن مؤلفه‌های حقیقی و موهومی بردارها در معادله (2.59) خواهیم داشت:

$$z_1 \cos\theta_1 + z_2 \cos\theta_2 + z_3 \cos\theta_3 - z_4 \cos\theta_4 = 0 \qquad (2.60)$$

$$z_1 \sin\theta_1 + z_2 \sin\theta_2 + z_3 \sin\theta_3 - z_4 \sin\theta_4 = 0 \qquad (2.61)$$

با انتخاب زمین در راستای محور x (شکل فوق) بین $\theta_1 = 180^\circ$ داریم:

$$-z_1 + z_2 \cos\theta_2 - z_4 \cos\theta_4 = -z_3 \cos\theta_3 \qquad (2.64)$$

$$z_2 \sin\theta_2 - z_4 \sin\theta_4 = -z_3 \sin\theta_3 \qquad (2.65)$$

جهت حذف θ_3، طرفین معادلات فوق را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم.

$$z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 - 2z_1 z_2 \cos\theta_2 + 2z_1 z_4 \cos\theta_4 - 2z_2 z_4 (\cos\theta_2 \cos\theta_4 + \sin\theta_2 \sin\theta_4)$$

و یا

$$\frac{z_3^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_4^2}{2z_2 z_4} + \frac{z_1}{z_4}\cos\theta_2 - \frac{z_1}{z_2}\cos\theta_4 = -\cos(\theta_2 - \theta_4)$$

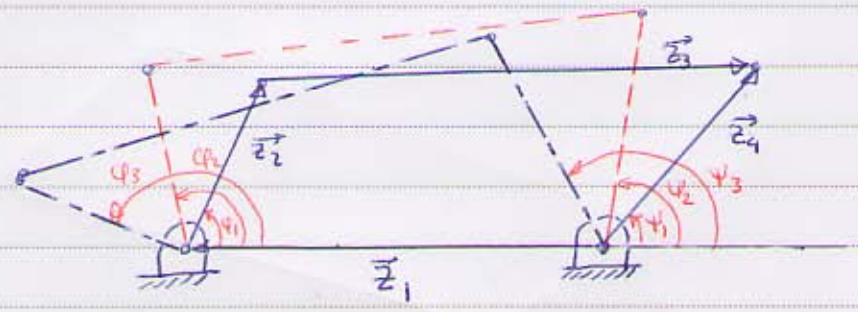
و به صورت فشرده:

$$K_1 \cos\theta_2 + K_2 \cos\theta_4 + K_3 = -\cos(\theta_2 - \theta_4)$$

که در آن

$$K_1 = \frac{Z_1}{Z_4} \quad ; \quad K_2 = \frac{-Z_1}{Z_2} \quad ; \quad K_3 = \frac{Z_3^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_4^2}{2 Z_2 Z_4}$$

حال برای سه موقعیت مکانیزم چهار میله‌ای، θ_2 در زاویه‌ی φ_1 و φ_2 و φ_3 قرار می‌گیرد و θ_4 در زاویه‌ی ψ_1، ψ_2 و ψ_3 قرار می‌گیرد.



بنابراین

$$K_1 \cos\varphi_1 + K_2 \cos\psi_1 + K_3 = -\cos(\varphi_1 - \psi_1)$$

$$K_1 \cos\varphi_2 + K_3 \cos\psi_2 + K_3 = -\cos(\varphi_2 - \psi_2) \qquad (2.70)$$

$$K_1 \cos\varphi_3 + K_3 \cos\psi_3 + K_3 = -\cos(\varphi_3 - \psi_3)$$

حال با کمک دستور کرامر می‌توان دستگاه فوق را حل نمود و یا از روش حذفی عمل نمود: با کمک گرفتن معادله دوم و سوم از معادله اول، K_3 حذف می‌شود:

$$K_1 \overbrace{(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)}^{\omega_1} + K_2 \overbrace{(\cos\psi_1 - \cos\psi_2)}^{\omega_2} = \overbrace{-\cos(\varphi_1 - \psi_1) + \cos(\varphi_2 - \psi_2)}^{\omega_3}$$

$$K_1 \overbrace{(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_3)}^{\omega_4} + K_2 \overbrace{(\cos\psi_1 - \cos\psi_3)}^{\omega_5} = \overbrace{-\cos(\varphi_1 - \psi_1) + \cos(\varphi_3 - \psi_3)}^{\omega_6}$$

حال K_1 و K_2 از روش کرامر برابر است با:

$$K_1 = \frac{\omega_3 \omega_5 - \omega_2 \omega_6}{\omega_1 \omega_5 - \omega_2 \omega_4} \qquad K_2 = \frac{\omega_1 \omega_6 - \omega_3 \omega_4}{\omega_1 \omega_5 - \omega_2 \omega_4}$$

$$K_3 = -\cos(\varphi_i - \psi_i) - K_1 \cos\varphi_i - K_2 \cos\psi_i \qquad i = 1, 2 \text{ یا } 3$$

با انتخاب Z_1:

$$Z_4 = \frac{Z_1}{K_1} \quad , \quad Z_2 = \frac{-Z_1}{K_2} \quad , \quad Z_3 = \sqrt{2 K_3 Z_2 Z_4 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_4^2}$$

مثال: مطلوب است طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای که تابع $y=\sin x$ برای $0\le x\le 90$ را تولید نماید. از سه نقطه دقت چبیشف استفاده نماید. $\Delta\psi=90^\circ$, $\Delta\varphi=\cancel{60}\ 120^\circ$

حل: با توجه به نقاط دقت چبیشف بدست آوردیم:

$\varphi_2-\varphi_1=52^\circ$ $\qquad$ $\psi_2-\psi_1=36.15^\circ$ و در روش ترسیمی اعمال کردیم

$\varphi_3-\varphi_1=104^\circ$ $\qquad$ $\psi_3-\psi_1=53.4^\circ$

با توجه به شکل روش ترسیمی که مکانیزم بدست آمده است) $\psi_1=66.27^\circ$, $\varphi_1=105^\circ$

$\varphi_1=105^\circ$, $\psi_1=66.27^\circ$

$\varphi_2=157^\circ$, $\psi_2=102.42^\circ$

$\varphi_3=209^\circ$, $\psi_3=119.67^\circ$

بنابراین

$\omega_1=\cos(105)-\cos(157)=0.662$ $\qquad$ $\omega_4=0.616$

$\omega_2=0.618$ $\qquad$ $\omega_5=0.897$

$\omega_3=-0.201$ $\qquad$ $\omega_6=-0.768$

$K_1=1.385$, $K_2=-1.803$ $\qquad$ $K_3=0.304$

اگر $z_1=52.5\ mm$ انتخاب کنیم:

$z_2=29.0\ mm$ $\qquad$ $z_3=38\ mm$ $\qquad$ $z_4=75.6\ mm$

که با حل ترسیمی مطابقت دارد.

مثال: تولید تابع $y=\lg_{10} x$ در فاصله $1\le x\le 10$ با سه نقطه دقت:

حل: $x_0=1$, $x_4=10$, $\Delta x=9$, $n=3$ $\qquad$ $(y_0=0,\ y_4=1)$

$x_1=1.6 \rightarrow y_1=0.204$

$x_2=5.5$ $\qquad$ $y_2=0.741$

$x_3=9.4$ $\qquad$ $y_3=0.974$

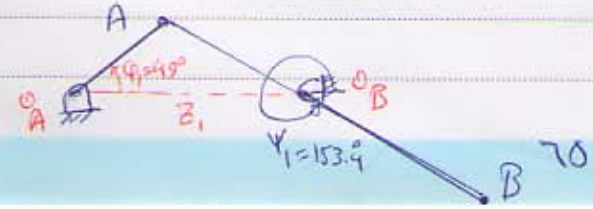
$\theta_1)_0=135$, $\Delta\psi=90^\circ$ & $\theta_2)_0=45$, $\Delta\psi=60$ انتخاب:

$\varphi_1=49^\circ$ $\qquad$ $\psi_1=153.4^\circ$ $\qquad$ $K_1=-0.703$ $\qquad$ $z_1=10\ cm$

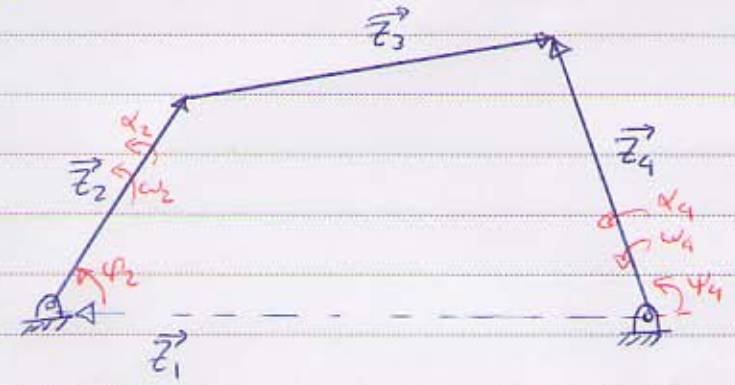
$\varphi_2=75^\circ$ $\qquad$ $\psi_2=201.7^\circ$ $\rightarrow$ $K_2=-2$ $\rightarrow$ $z_2=5\ cm$

$\varphi_3=101^\circ$ $\qquad$ $\psi_3=222.7^\circ$ $\qquad$ $K_3=-1.078$ $\qquad$ $z_3=21.85\ cm$

$z_4=-14.2\ cm$



Order Synthesis : Four-bar Function Generation : مسئله F.G. با مشتقات زمانی



داده ها: φ_2 ; ψ_4
ω_2 ; ω_4
α_2 ; α_4
⋮ ⋮

$$\vec{z}_2+\vec{z}_3-\vec{z}_4=-\vec{z}_1 \qquad (2.89)$$

به فرم قطبی:

$$z_2e^{i\theta_2}+z_3e^{i\theta_3}-z_4e^{i\theta_4}=z_1e^{i\theta_1} \qquad (2.90)$$

با مشتق گیری از رابطه (2.90) نسبت به زمان و قرار دادن $\omega_i=\frac{d\theta_i}{dt}$

$$z_2\omega_2 ie^{i\theta_2}+z_3\omega_3 ie^{i\theta_3}-z_4\omega_4 ie^{i\theta_4}=0 \qquad (2.91)$$

و یا

$$\vec{z}_2\omega_2+\vec{z}_3\omega_3-\vec{z}_4\omega_4=0 \qquad (2.92)$$

و با مشتق گیری از رابطه (2.91) داریم:

$$z_2(i\alpha_2-\omega_2^2)e^{i\theta_2}+z_3(i\alpha_3-\omega_3^2)e^{i\theta_3}-z_4(i\alpha_4-\omega_4^2)e^{i\theta_4}=0$$

و یا

$$\vec{z}_2(i\alpha_2-\omega_2^2)+\vec{z}_3(i\alpha_3-\omega_3^2)-\vec{z}_4(i\alpha_4-\omega_4^2)=0$$

و مشتق بدین صورت ادامه پیدا می کند.

تعداد موقعیت و مشتقات متوالی	تعداد معادلات جبری	تعداد مجهولات	تعداد اشتقاق	تعداد راه حل
1	2	6 ($\vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$)	4	∞^4
2	4	7 ($\omega_2+\omega_3$)	3	∞
3	6	8 ($\omega_2+\alpha_3$)	2	∞^2
4	8	9 ($\omega_2+\dot{\alpha}_3$)	1	∞^1
5	10	10 ($\omega_2+\ddot{\alpha}_3$)	0	محدود

مثال: مطلوب است طراحی یک مکانیزم چهار میله‌ای به نحوی که بین سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای لینک در یک لحظه داشته باشیم:

$\omega_2 = 2\ rad/s$ $\qquad \alpha_2 = 0$

$\omega_3 = 3.5\ rad/s$ $\qquad \alpha_3 = 2\ rad/s^2$

$\omega_4 = 5\ rad/s$ $\qquad \alpha_4 = 4\ rad/s^2$

حل:

$|\vec{z}_1| = 1,\ \vec{z}_1 = -1$

$$\begin{cases} \vec{z}_2 + \vec{z}_3 - \vec{z}_4 = -\vec{z}_1 = 1 \\ \omega_2 \vec{z}_2 + \omega_3 \vec{z}_3 - \omega_4 \vec{z}_4 = 0 \\ (i\alpha_2 - \omega_2^2)\vec{z}_2 + (i\alpha_3 - \omega_3^2)\vec{z}_3 - (i\alpha_4 - \omega_4^2)\vec{z}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_4 \\ 0 & i\alpha_3 - \omega_3^2 & -(i\alpha_4 - \omega_4^2) \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 & -\omega_4 \\ i\alpha_2 - \omega_2^2 & i\alpha_3 - \omega_3^2 & -(i\alpha_4 - \omega_4^2) \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{D = 6.75 + 0i}} = 3.89 - 0.59i$$

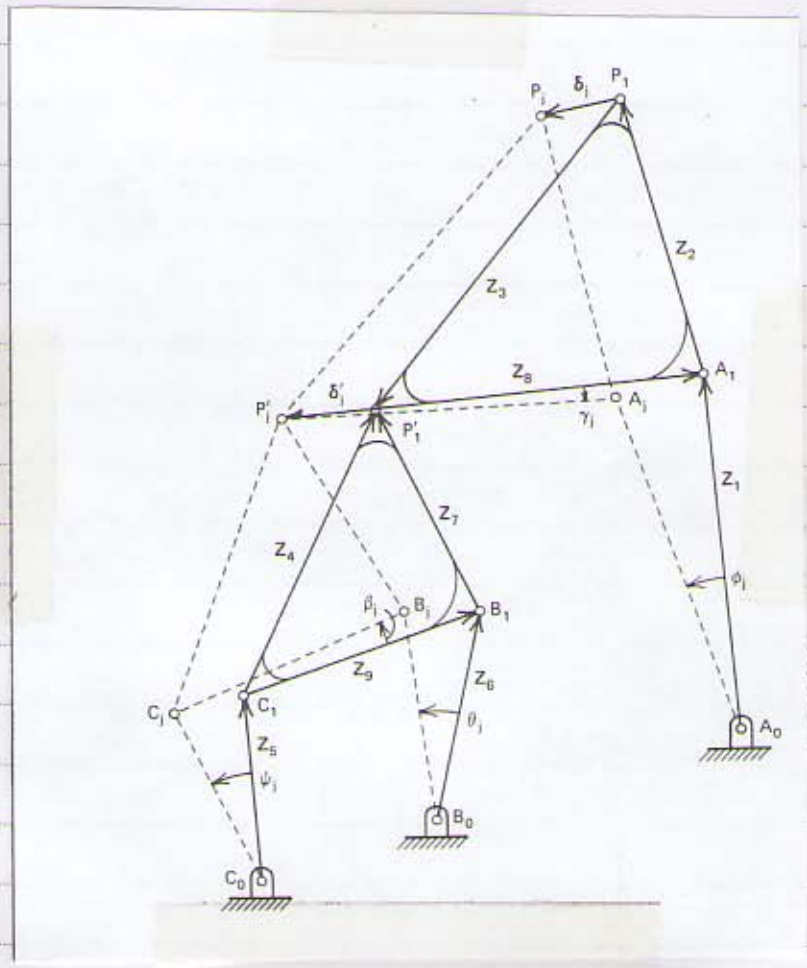
$\vec{z}_3 = -4.44 + 1.19i$

$\vec{z}_4 = -1.56 + 0.59i$

طراحی مکانیزم‌های چند میله‌ای

تکنیک سیکل‌های برداری که در مکانیزم‌های چهار میله‌ای مورد استفاده قرار گرفت برای کمک به بیشتر تحلیل‌ها (نظیر مکانیزم‌های پمپ یا شش میله‌ای) نیز قابل استفاده است.

در اینجا صرف‌نظر از اینکه نوع مسئله چیست (نظیر $F.G.$ ، $M.G.$ ، $P.G.$) است) سیکل‌های کاربرداری نوشته می‌شود.



The Stephenson III type of six-bar

با توجه به سیکل اول داریم:

$$\text{loop 1}: \quad \vec{z}_1(e^{i\varphi_j}-1)+\vec{z}_2(e^{i\delta_j}-1)=\vec{\delta}_j \qquad (2.29)$$

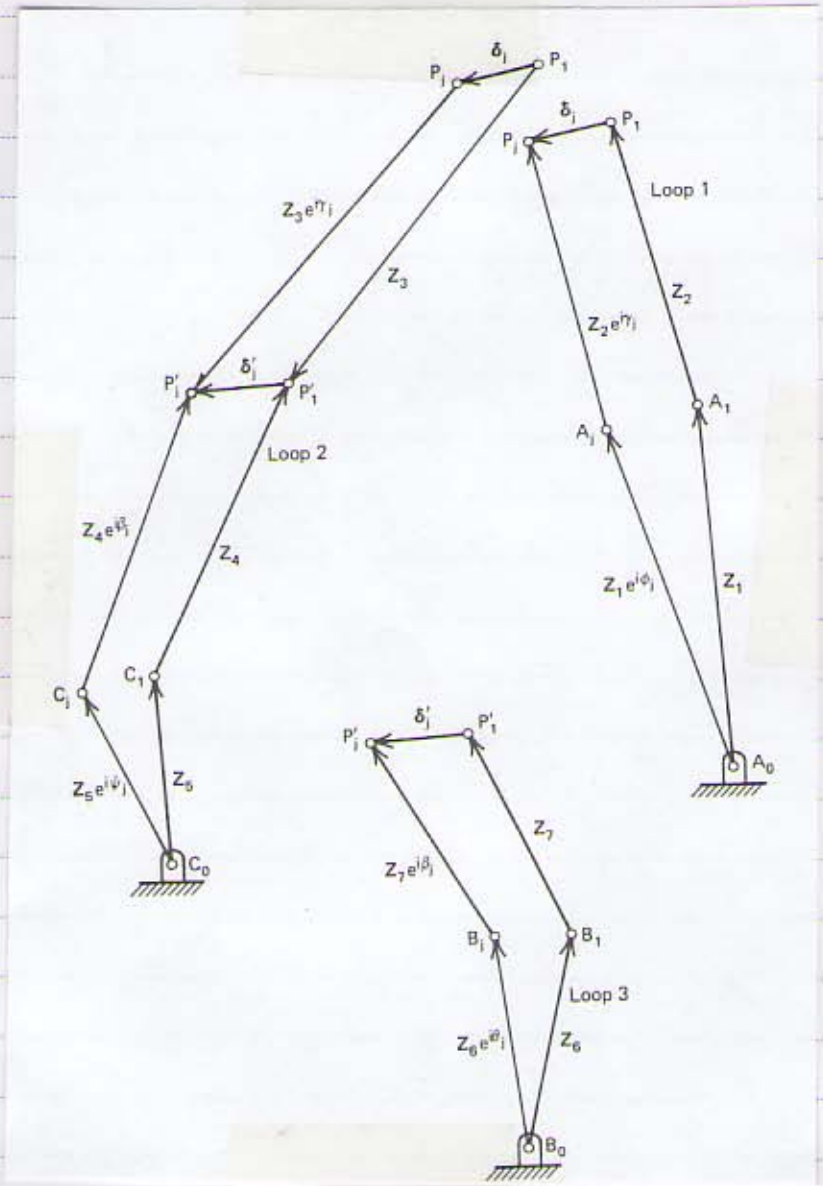
$$\text{loop 2}: \quad \vec{z}_5(e^{i\psi_j}-1)+\vec{z}_4(e^{i\beta_j}-1)-\vec{z}_3(e^{i\gamma_j}-1)=\vec{\delta}_j \qquad (2.30)$$

$$\text{loop 3}: \quad \vec{z}_6(e^{i\theta_j}-1)+\vec{z}_7(e^{i\beta_j}-1)-\vec{z}_3(e^{i\gamma_j}-1)=\vec{\delta}_j \qquad (2.31)$$

شکل اول، به فرم استاندارد است (در شکل مثلاً P.G. یا M.G.) بردار $\vec{\delta}_j$ و یا ϕ_j و یا γ_j معلوم و داده شده هستند

شکل دوم و سوم همانند مسئله F.G. است که بحث آنها در جدول مربوط آمده است با این تفاوت که

در اینجا طول دوم را دیگر صفر نیست و $\vec{\delta}_j$ معلوم است.



حال می‌توان مرحله ۲ و ۳ به انتخاب را انجام داد که می‌تواند $\vec{Z}_3$ انتخاب گردد، اگر γ_j داده شده باشد

و یا معلوم در نظر گرفته شود می‌توان از شکل اول و معادلات (2.30) و (2.31) معادله (2.32) را به صورت زیر

نوشت:

$$\vec{\delta}_j = \vec{\delta}_j + \vec{Z}_3(e^{i\gamma_j} - 1) \qquad (2.32)$$

در این صورت شکل دوم و شکل سوم به صورت استاندارد نوشته می‌شود:

loop 2 : $\vec{z}_5(e^{i\psi_j}-1)+\vec{z}_4(e^{i\beta_j}-1)=\vec{\delta}'_j$ (2.33)

loop 3 : $\vec{z}_6(e^{i\theta_j}-1)+\vec{z}_7(e^{i\beta_j}-1)=\vec{\delta}'_j$ (2.34)

که $\vec{\delta}'_j$ جابجایی نقطه P خواهد بود (در واقع با انتخاب $\vec{z}_3$ شکل کوپلر انتخاب شده)

چرا ما به دنبال مکانیزم 4 میله ای می رویم در موردی که مکانیزم چهار میله ای وجود دارد؟

۱- اگر مسئله ما با چهار نقطه دقت با زمان بندی مشخص باشد دیگر مکانیزم چهار میله ای جواب نیست.

۲- ابعاد و یا تکیه گاه های مکانیزم چهار میله ای برای مسئله ما نیست.

۳- برای نقاط دقت بالاتر مثلاً 5 نقطه تعداد جوابهای چهار میله ای محدود است و برای بیشتر از 5 نقطه دقت جوابی وجود ندارد.

۴- برای ترکیب مسایل F.G. و P.G. نیازمند مکانیزم با تعداد اعضای بیشتر هستیم.

مثال: مطلوبست طراحی یک مکانیزم شش میله ای از نوع III، استفنسون Stephenson که یک تابع درجه 2 تولید کند و یک نقطه از آن بر روی یک خط مستقیم حرکت نماید.

مسیر مورد نظر یک خط مستقیم (y های داده شده) و تابع مورد نظر $y=x^2$ و $1\le x\le 3$ با دامنه تغییرات $\Delta\varphi=40^\circ$ (ورودی) و خروجی $\Delta\psi=90^\circ$ می باشد.

نقاط دقت عبارتند از:

$\vec{\delta}_2=0.7-0.5i$ $\vec{\delta}_4=2.55-1.8i$

$\vec{\delta}_3=1.5-1.1i$ $\vec{\delta}_5=3.6-2.6i$

و

$\varphi_2=10^\circ$ $\psi_2=14.06^\circ$

$\varphi_3=20$ $\psi_3=33.75^\circ$

$\varphi_4=30^\circ$ $\psi_4=59.06^\circ$

$\varphi_5=40^\circ$ $\psi_5=90.00^\circ$

جواب مکانیزم: در نقاط دقت

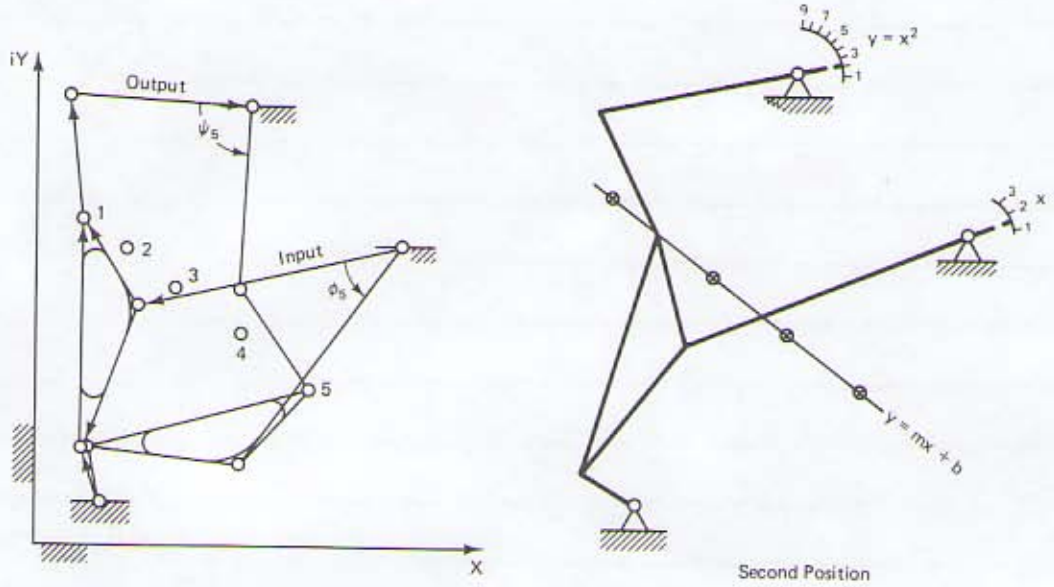


Figure 3.27 Synthesized six-bar simultaneous path and function generator of Ex. 3.2 in initial and final prescribed positions.

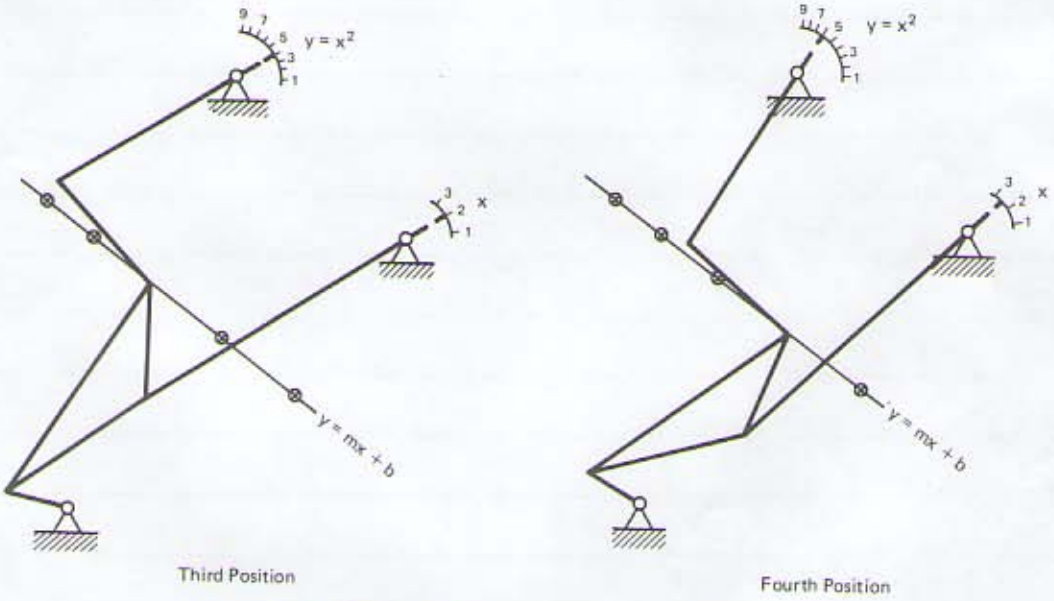
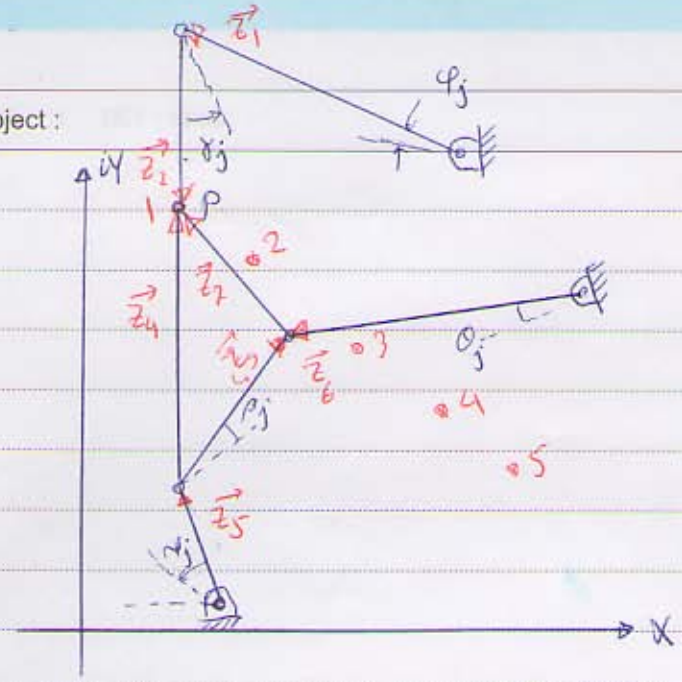


Figure 3.28 Intermediate positions of the mechanism of Fig. 3.27.



حل: با توجه مسیر P.G.، تابع خروجی بر روی دیاگرام $\vec{z}_1$ و $\vec{z}_5$ تولید می‌شود و نقطه P بر روی مسیر حرکت خواهد نمود.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{z}_1(e^{i\varphi_j}-1)+\vec{z}_2(e^{i\delta_j}-1)=\vec{\delta}_j \\ \vec{z}_6(e^{i\theta_j}-1)+\vec{z}_7(e^{i\beta_j}-1)=\vec{\delta}_j \\ \vec{z}_5(e^{i\psi_j}-1)+\vec{z}_4(e^{i\beta_j}-1)=\vec{\delta}_j \end{cases}$$

در این معادلات φ_j، ψ_j و δ_j معلوم هستند.

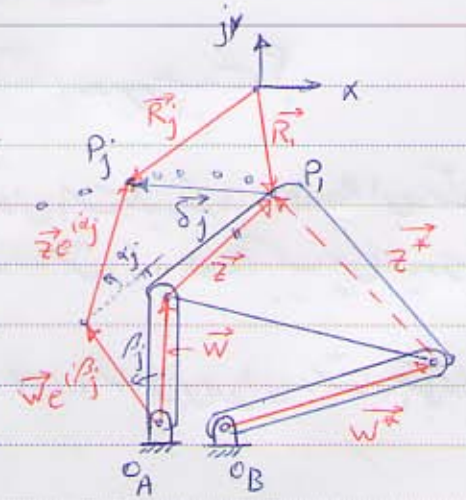
$\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_4, \vec{z}_5, \vec{z}_7, \vec{z}_8$ و γ_j و β_j و θ_j مجهول هستند

با توجه به نقاط دقت (5 تا) $j=2,3,4,5$ نوشته می‌شود از این رو $4\times3\times2=24$ معادله خواهم داشت و با (این رشته چهار رشته می‌شود)

$6\times2+4(1+1+1)=24$ مجهول، که Sander در مقاله [243] در سال 1971 این مسئله را حل کرده است.

جواب‌ها در شکل روبرو آمده است.

حل مسئله M.G. با چهار نقطه دقت:



$$\vec{w}e^{i\beta_j}+\vec{z}e^{i\alpha_j}-\vec{R_j}+\vec{R_1}-\vec{z}-\vec{w}=0$$

$$\vec{w}(e^{i\beta_j}-1)+\vec{z}(e^{i\alpha_j}-1)=\vec{\delta_j}$$

$\vec{\delta_j}=\vec{R_j}-\vec{R_1}$

P.G.: $\vec{\delta_j}$ و β_j (داده)

M.G.: $\vec{\delta_j}$ و α_j (داده)

برای چهار نقطه دقت داریم: $j=2,3,4$:

$$\begin{cases}\vec{w}(e^{i\beta_2}-1)+\vec{z}(e^{i\alpha_2}-1)=\vec{\delta_2}\\ \vec{w}(e^{i\beta_3}-1)+\vec{z}(e^{i\alpha_3}-1)=\vec{\delta_3}\\ \vec{w}(e^{i\beta_4}-1)+\vec{z}(e^{i\alpha_4}-1)=\vec{\delta_4}\end{cases} \qquad (3.3)$$

برای چهار نقطه دقت M.G.:

$\vec{\delta_2}$ و $\vec{\delta_3}$ و $\vec{\delta_4}$ و α_2 و α_3 و α_4 معلوم هستند

مجهولات $\vec{w}$ و $\vec{z}$ و β_2 و β_3 و β_4 (مجهول) هستند با توجه به تعداد ۳ معادله برداری (۶ معادله جبری) فوق می‌توان یکی از مجهولات مثل β_2 (چون در نامحرز دارد) را انتخاب نمود.

از این رو دستگاه فوق یک دستگاه غیرخطی است.

این دستگاه یک دستگاه معادله مختلط غیرهمگن خطی برحسب مجهولات $\vec{w}$ و $\vec{z}$ است. یعنی:

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1\\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1\\ e^{i\beta_4}-1 & e^{i\alpha_4}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{w}\\ \vec{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\delta_2}\\ \vec{\delta_3}\\ \vec{\delta_4}\end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

از آنجا که این دستگاه خطی برحسب $\vec{w}$ و $\vec{z}$، دارای سه معادله خطی غیرهمگن است برای وجود جواب، باید یکی از معادلات به دو معادله دیگر وابسته باشد (ترکیب خطی از آن دو معادله دیگر باشد). به عبارت دیگر باید ضرایب این دستگاه شرایط سازگاری را ارضا کنند.

شرط وجود دستگاه دو بر دو چیست؟

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

چون دستگاه همگن است باید رتبه یا Rank این دستگاه باید ۱ باشد یعنی باید این دو معادله نتیجه یک معادله باشد (از یک معادله ناشی شده باشند) و Rank یک یعنی باید در سطرهای ۱ بالاتر آن صفر اضافه شود

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ولی چون (۱ ≠ ۰) است از این رو این دستگاه جبراً به این $x=y=0$ دارد.

یاد آوری: شرط وجود جواب برای دستگاه چیست؟

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=-4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

حل:

برای وجود جواب باید یکی از این معادلات ترکیب خطی از دو معادله دیگر باشد و یا

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0 \qquad |M| = 0 \qquad \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}$$

ستارات معادله خط سمت چپ

به ماتریس M، ماتریس افزوده شده یا augmented matrix گفته می‌شود.

در دستگاه (3.4)، ستون دوم ماتریس خط سمت راست معادله معلوم هستند در صورتی که ستون اول خط سمت دستگاه شامل β_3 و β_4 مجهولات را شامل می‌شوند. این دستگاه وقتی دارای جواب است که رتبه (rank)* ماتریس افزوده شده برابر با ۲ باشد. (تعداد معادلات مستقل ۲ تا باشد) برای آنکه رتبه ماتریس M، ۲ باشد باید:

$$\mathrm{Det}\, M = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \\ e^{i\beta_4}-1 & e^{i\alpha_4}-1 & \vec{\delta}_4 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.5)$$

معادله (3.5) یک معادله مختلط (یا دو معادله جبری غیر وابسته) شامل دو مجهول اسکالر β_3 و β_4 می‌باشد. از این معادله را برحسب ستون اول ماتریس M بسط داده شود خواهیم داشت:

$$\vec{\Delta}_2 e^{i\beta_2} + \vec{\Delta}_3 e^{i\beta_3} + \vec{\Delta}_4 e^{i\beta_4} + \vec{\Delta}_1 = 0 \qquad (3.6)$$

که $\vec{\Delta}_1 = -\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_4$ (3.7)

که Δ_j $(j=2,3,4)$ برابر است با:

$$\vec{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \\ e^{i\alpha_4}-1 & \vec{\delta}_4 \end{vmatrix} \qquad \vec{\Delta}_3 = -\begin{vmatrix} e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\alpha_4}-1 & \vec{\delta}_4 \end{vmatrix} \qquad \vec{\Delta}_4 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \end{vmatrix} \qquad (3.8)$$

که $\vec{\Delta}_j$ ها معلوم هستند (برحسب مقادیر داده‌ها هستند)

با حل معادله (3.6) که تنها دو مجهول β_3 و β_4 در آن هستند (شرایط سازگاری معادله (3.3) نیز اعمال شود) و پس قرار دادن در معادله (3.3)، W را محاسبه نمود.

* رتبه یک ماتریس وقتی برابر با r است که حداقل یک مایینور اصلی از مرتبه $r \times r$ غیر صفر داشته باشد و تمام مایینورهای $[r+1] \times [r+1]$ آن مساوی با صفر باشند. (۷۳)

حل معادله (3.6) :

برای حل این معادله از یک روش ترسیمی استفاده می‌کنیم :

$$\vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2 + \vec{\Delta}_3 + \vec{\Delta}_4 = 0$$

$$\vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2 e^{i\beta_2} + \vec{\Delta}_3 e^{i\beta_3} + \vec{\Delta}_4 e^{i\beta_4} = 0$$

می‌توان یک مکانیزم چهارمیله‌ای تصنعی در نظر گرفت که لینک‌های آن $\vec{\Delta}_1$، $\vec{\Delta}_2$، $\vec{\Delta}_3$ و $\vec{\Delta}_4$ باشند و مکانیزم از حالت اولیه به حالت ثانویه حرکت کرده باشد و در این صورت زمین ثابت ($\vec{\Delta}_1$)، لینک $\vec{\Delta}_2$ به اندازه β_2 دوران کرده و لینک‌های $\vec{\Delta}_3$ و $\vec{\Delta}_4$ نیز به اندازه β_3 و β_4 دوران نموده‌اند.

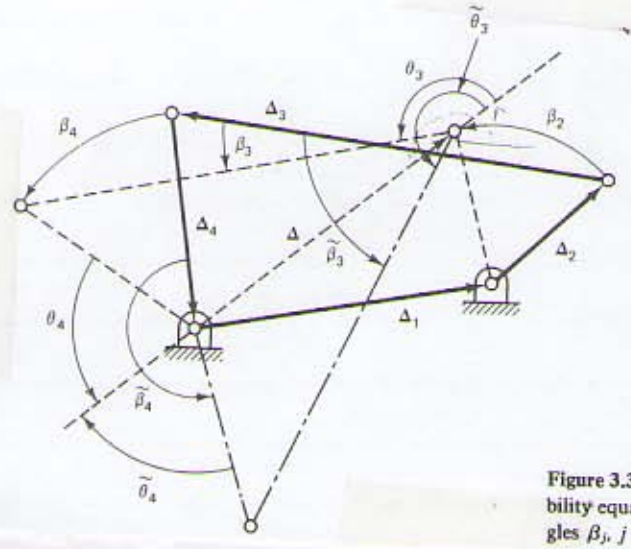


Figure 3.3 Geometric solution of the compatibility equation [Eq. (3.6)] for the unknown angles β_j, $j = 3,4$.

مراحل حل:

۱- رسم مکانیزم اولیه با رسم متوالی $\vec{\Delta}_1$، $\vec{\Delta}_2$، $\vec{\Delta}_3$، $\vec{\Delta}_4$ که به نقطه اولیه ختم می‌شود (یک شکل بسته)

۲- دوران مکانیزم از حالت اولیه به ثانویه: $\vec{\Delta}_1$ ثابت، $\vec{\Delta}_2$ به اندازه β_2 دوران کرده سپس از انتهای $\vec{\Delta}_2 e^{i\beta_2}$ به اندازه $|\vec{\Delta}_3|$ و از ابتدای شکل به اندازه $|\vec{\Delta}_4|$ کمان زده تا مکانیزم در حالت ثانویه به دست آید. (مسئله دو دسته جواب دارد.)

۳- محاسبه β_3 و β_4 از شکل و یا فلوچارت زیر :

(i) محاسبه $\vec{\Delta}_1$، $\vec{\Delta}_2$، $\vec{\Delta}_3$، $\vec{\Delta}_4$

محاسبه β_3 و $\tilde{\beta}_3$

(ii) محاسبه: $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2 e^{i\theta_2}$

(iii) $\cos\theta_3 = \dfrac{\Delta_4^2 - \Delta_3^2 - \Delta^2}{2\Delta_3\Delta}$ ، $|\vec{\Delta}_j| = \Delta_j$ که $\rightsquigarrow \theta_3 = \checkmark$

(یعنی $0 \le \theta_3 \le 2\pi$)

TABLE 3.1 ANALYTICAL SOLUTION OF COMPATIBILITY EQUATION EQ. (3.6) FOR β_j, $j = 3, 4$, BASED ON GEOMETRIC CONSTRUCTION.

Computation of β_3, β_4, $\tilde{\beta}_3$, and $\tilde{\beta}_4$ for a given value of β_2 (see Fig. 3.3)

$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_2}$

$\cos\theta_3 = \dfrac{\Delta_4^2 - \Delta_3^2 - \Delta^2}{2\Delta_3\Delta}$, where $\Delta_j = |\Delta_j|$ and $\Delta = |\Delta|$

$\sin\theta_3 = |(1 - \cos^2\theta_3)^{1/2}| \geq 0$

Let $\cos\theta_3 = x$, $\sin\theta_3 = y > 0$ With these, use the ATAN2 function (FORTRAN IV or WATIV) to find $0 \leq \theta_3 \leq \pi$.

$\beta_3 = \arg\Delta + \theta_3 - \arg\Delta_3$

$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3$

$\tilde{\beta}_3 = \arg\Delta + \tilde{\theta}_3 - \arg\Delta_3$

$\cos\theta_4 = \dfrac{\Delta_3^2 - \Delta_4^2 - \Delta^2}{2\Delta_4\Delta}$

$\sin\theta_4 = |(1 - \cos^2\theta_4)^{1/2}| \geq 0$

Let $\cos\theta_4 = x$, $\sin\theta_4 = y > 0$ Use the ATAN2 function to find $0 \leq \theta_4 \leq \pi$; $\tilde{\theta}_4 = -\theta_4$.

$\beta_4 = \arg\Delta - \theta_4 - \arg\Delta_4$

$\tilde{\beta}_4 = \arg\Delta + \theta_4 - \arg\Delta_4 + \pi$

the compatibility linkage, defined by Eq. (3.7) as the closure equation at the start. This concept is illustrated in Fig. 3.3. Here the starting position is shown in full lines. Regarding Δ_2 as the "driving crank," the arbitrarily assumed β_2 amounts to

iv) $\beta_3 = \arg \vec{\Delta} + \theta_3 - \arg \vec{\Delta}_3$: جواب اول

$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3$

$\tilde{\beta}_3 = \arg \vec{\Delta} + \tilde{\theta}_3 - \arg \vec{\Delta}_3$: جواب دوم

محاسبه β_4 و $\tilde{\beta}_4$:

v) $\cos\theta_4 = \dfrac{\Delta_3^2 - \Delta_4^2 - \Delta^2}{2\Delta_4\Delta}$ $\rightarrow$ $\theta_4 = \checkmark$

$\sin\theta_4 = \left|(1-\cos^2\theta_4)^{1/2}\right| \geq 0$ (یعنی $0 \leq \theta_4 \leq \pi$)

vi) $\beta_4 = \arg \vec{\Delta} - \theta_4 - \arg \vec{\Delta}_4$

$\tilde{\beta}_4 = \arg \vec{\Delta} + \theta_4 - \arg \vec{\Delta}_4 + \pi$

با قرار دادن هر مجموعه جواب β_3 و β_4 در دو معادله دستگاه (3.4)، $\vec{W}$ و $\vec{Z}$ از روش کرامر محاسبه می‌شوند (چون این سه معادله [(3.4)] وابسته هستند هر دو معادله را که انتخاب شود جواب یکسان خواهیم داشت.)

حل مسئله M.G. با پنج نقطه دقت :

از حل مسئله M.G. داریم :

$$\begin{cases} \vec{W}(e^{i\beta_2}-1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_2}-1) = \vec{\delta}_2 \\ \vec{W}(e^{i\beta_3}-1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_3}-1) = \vec{\delta}_3 \\ \vec{W}(e^{i\beta_4}-1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_4}-1) = \vec{\delta}_4 \\ \vec{W}(e^{i\beta_5}-1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_5}-1) = \vec{\delta}_5 \end{cases} \qquad (3.30)$$

برای پنج نقطه دقت M.G. ،

$\vec{\delta}_2$ و $\vec{\delta}_3$ و $\vec{\delta}_4$ و $\vec{\delta}_5$

α_2 و α_3 و α_4 و α_5

معلوم هستند و $\vec{W}$ و $\vec{Z}$ ، β_2 و β_3 و β_4 و β_5 (۸ مجهول) معادلات فوق هستند

با توجه به تعداد معادلات دست جبری فوق که Δ تا هستند حق انتخاب وجود ندارد.

ماتریس افزوده برای این دستگاه عبارت است از:

$$M=\begin{bmatrix} e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \\ e^{i\beta_4}-1 & e^{i\alpha_4}-1 & \vec{\delta}_4 \\ e^{i\beta_5}-1 & e^{i\alpha_5}-1 & \vec{\delta}_5 \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

برای دستگاه معادلات (3.30) با توجه به دو بردار مجهول $\vec{W}$ و $\vec{Z}$ باید رتبهٔ ماتریس M، برابر با ۲ باشد.
بنابراین میتوان دو معادلهٔ سازگاری برای نوشت:

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \\ e^{i\beta_4}-1 & e^{i\alpha_4}-1 & \vec{\delta}_4 \end{vmatrix}=0 \quad (3.32) \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} e^{i\beta_2}-1 & e^{i\alpha_2}-1 & \vec{\delta}_2 \\ e^{i\beta_3}-1 & e^{i\alpha_3}-1 & \vec{\delta}_3 \\ e^{i\beta_5}-1 & e^{i\alpha_5}-1 & \vec{\delta}_5 \end{vmatrix}=0 \quad (3.33)$$

معادلهٔ (3.32)، سه معادلهٔ اول دستگاه (3.30) و معادلهٔ (3.33)، معادلات اول و دوم و چهارم دستگاه (3.30) را به یکدیگر وابسته می‌کند.
در دو معادلهٔ فوق ستونهای اول شامل β_j ها $j=2,3,4,5$ مجهول هستند. اگر این دو دترمینان را بر حسب ستون اول بسط دهیم داریم:

$$\vec{\Delta}_2 e^{i\beta_2}+\vec{\Delta}_3 e^{i\beta_3}+\vec{\Delta}_4 e^{i\beta_4}-\vec{\Delta}_1=0 \qquad (3.34)$$

$$\vec{\Delta}'_2 e^{i\beta_2}+\vec{\Delta}'_3 e^{i\beta_3}+\vec{\Delta}_4 e^{i\beta_5}-\vec{\Delta}'_1=0 \qquad (3.35)$$

مقادیر $\vec{\Delta}_1$ و $\vec{\Delta}_2$ و $\vec{\Delta}_3$ و $\vec{\Delta}_4$ همان مقادیر رابطهٔ (3.8) است
و $\vec{\Delta}'_1$ و $\vec{\Delta}'_2$ و $\vec{\Delta}'_3$ و $\vec{\Delta}'_4$ مشابه $\vec{\Delta}_1$ هستند با این تفاوت که زیرنویس 4، به زیرنویس 5 تغییر می‌یابد.

حال اگر مزدوج روابط (3.34) و (3.35) گرفته شود خواهیم داشت:

$$\bar{\Delta}_2 e^{-i\beta_2}+\bar{\Delta}_3 e^{-i\beta_3}+\bar{\Delta}_4 e^{-i\beta_4}-\bar{\Delta}_1=0 \qquad (3.36)$$

$$\bar{\Delta}'_2 e^{-i\beta_2}+\bar{\Delta}'_3 e^{-i\beta_3}+\bar{\Delta}'_4 e^{-i\beta_5}-\bar{\Delta}'_1=0 \qquad (3.37)$$

(علامت $\rightarrow$ برای سادگی حذف شده است.)
حال می‌خواهیم β_4 و β_5 در معادلات (3.34) تا (3.37) حذف نماییم.

برای این منظور معادلهٔ (3.34) را در معادلهٔ (3.36) و معادلهٔ (3.35) را در معادلهٔ (3.37) ضرب می‌کنیم البته قبل از آن عبارتی که شامل β_4 و $\bar{\beta}_4$ با جهت حذف مشکل به سمت راست منتقل می‌کنیم:

از حاصل (3.34) در (3.36) داریم:

$$\Delta_4\bar{\Delta}_4 = \Delta_1\bar{\Delta}_1 - \Delta_1\bar{\Delta}_2 e^{-i\beta_2} - \Delta_1\bar{\Delta}_3 e^{-i\beta_3} - \Delta_2\bar{\Delta}_1 e^{i\beta_2}$$
$$+ \Delta_2\bar{\Delta}_2 + \Delta_2\bar{\Delta}_3 e^{i\beta_2} e^{-i\beta_3} - \Delta_3\bar{\Delta}_1 e^{i\beta_3} + \Delta_3\bar{\Delta}_2 e^{i\beta_3} e^{-i\beta_2} + \Delta_3\bar{\Delta}_3 \qquad (3.38)$$

که بصورت فشرده می‌توان نوشت:

$$C_1 e^{i\beta_3} + d_1 + \bar{C}_1 e^{-i\beta_3} = 0 \qquad (3.39)$$

که در آن

$$C_1 = \Delta_3(-\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 e^{-i\beta_2})$$

$$d_1 = -\bar{\Delta}_1\Delta_2 e^{i\beta_2} - \Delta_1\bar{\Delta}_2 e^{-i\beta_2} - \Delta_4\bar{\Delta}_4 + \sum_{j=1}^{3}\Delta_j\bar{\Delta}_j$$

که بصورت مشابه از ضرب رابطهٔ (3.35) در (3.37) داریم

$$C_2 e^{i\beta_3} + d_2 + \bar{C}_2 e^{-i\beta_3} = 0 \qquad (3.40)$$

که در آن C_2 و d_2 دقیقاً مطابق روابط C_1 و d_1 است و تنها بجای Δ_j، $\bar{\Delta}_j$ جایگزین می‌گردد.

در معادلات (3.39) و (3.40)، یک دستگاه معادلهٔ غیرخطی همگن با مجهولات $e^{i\beta_2}$ و $e^{i\beta_3}$ با توانهای اول و صفر و منهای یک و ضرایب معلوم است.

به روش حذف سیلوستر، توان β_3 را حذف می‌کنیم. Sylvester's dyalitic Elimina.nt

برای این منظور معادلات (3.39) و (3.40) را در $e^{i\beta_3}$ ضرب کرده و دو معادلهٔ حاصل می‌شود:

$$C_1 e^{i2\beta_3} + d_1 e^{i\beta_3} + \bar{C}_1 = 0 \qquad (3.41)$$

$$C_2 e^{i2\beta_3} + d_2 e^{i\beta_3} + \bar{C}_2 = 0 \qquad (3.42)$$

می‌توان مجهولات را به صورت $e^{2i\beta_3}$ ، $e^{i\beta_3}$ و $e^{-i\beta_3}$ نیز در نظر گرفت در این صورت

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & \bar{c}_1 \\ 0 & c_2 & \bar{c}_2 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2i\beta_3} \\ e^{i\beta_3} \\ e^{-i\beta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -\bar{c}_1 \\ -\bar{c}_2 \end{bmatrix}$$

از آنجا که این معادلات وابسته هستند باید دترمینان ماتریس افزوده صفر باشد،

$$\begin{vmatrix} 0 & c_1 & \bar{c}_1 & -d_1 \\ 0 & c_2 & \bar{c}_2 & -d_2 \\ c_1 & d_1 & 0 & -\bar{c}_1 \\ c_2 & d_2 & 0 & -\bar{c}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & d_1 & \bar{c}_1 \\ 0 & c_2 & d_2 & \bar{c}_2 \\ c_1 & d_1 & \bar{c}_1 & 0 \\ c_2 & d_2 & \bar{c}_2 & 0 \end{vmatrix} = E = 0$$

آنها $e^{i2\beta_3}$ ، $e^{i1\beta_3}$ و $e^{i0\beta_3}$ و $e^{i(-1)\beta_3}$ به صورت مجهولات معادلات (3.39) تا (3.42) در نظر گرفته شوند آنگاه چهار معادله همان خطی با ضرایب معلوم خواهیم داشت. از آنجا که سمت راست این معادلات صفر است جهت وجود جواب لازم است دترمینان ضرایب این معادلات صفر باشد

از این رو:

$$E = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & d_1 & \bar{c}_1 \\ 0 & c_2 & d_2 & \bar{c}_2 \\ c_1 & d_1 & \bar{c}_1 & 0 \\ c_2 & d_2 & \bar{c}_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.43)$$

دقت کنید که در معادله (3.43) عبارت نمایی $e^{i\beta_3}$ حذف شده است.

با بسط معادله فوق می‌توان به چند جمله‌ای از $e^{i\beta_2}$ رسید:

$$\sum a_m e^{im\beta_2} = 0 \qquad m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \qquad (3.44)$$

و تمام ضرایب a_m تابع $\vec{\delta}_j$ و α_j معلوم هستند

دقت کنید که a_{-k} $(k=1,2,3)$ مزدوج مختلط a_k بوده و a_0 حقیقی است از آنجا که E حقیقی است (صفر) از این رو از قسمت موهومی آن صرف‌نظر می‌شود. و از قسمت حقیقی داریم:

$$\sum_m \left[p_m \cos(m\beta_2) + q_m \sin(m\beta_2)\right] = 0 \qquad m = 0, 1, 2, 3 \qquad (3.45)$$

که در آن p_m و q_m حقیقی هستند. با بسط $\cos, \sin$ زوایای $2\beta_2$ و $3\beta_2$ برحسب β_2 و سپس با جایگزینی مقدار β_2 برحسب $tg\frac{\beta_2}{2}$ می‌توان نوشت: (به یک معادله درجه ۶ خطی برحسب τ می‌رسیم)

$$\sum_{n=0,1,2,\dots}^{6} A_n \tau^n = 0 \qquad (3.46)$$

$$\sin 3\beta_2 = 3\sin\beta_2 - 4\sin^3\beta_2$$

$$\sin\beta_2 = \frac{2tg\frac{\beta_2}{2}}{1 - tg^2\frac{\beta_2}{2}}$$

$$\tau = \tan\frac{\beta_2}{2}$$

- یکی از جواب‌های بدیهی $\tau = 0 \leftarrow \beta_2 = 0$ خواهد بود.

- از معادلات (3.32) و (3.33) واضح است که جواب بدیهی $\beta_j = \alpha_j$ $j = 2, 3, 4, 5$ خواهد بود (اینجا $\beta_2 = \alpha_2$)

با حذف دو جواب فوق یا فاکتور گرفتن عبارت $\tau\left[\tau - \tan(\alpha_2/2)\right]$ یک چند جمله‌ای درجه چهار برحسب τ داریم:

$$\tau^4 + \lambda_3 \tau^3 + \lambda_2 \tau^2 + \lambda_1 \tau + \lambda_0 = 0 \qquad (3.47)$$

معادله (3.47) دارای صفر، یا دو و یا چهار جواب حقیقی است.
هر ریشه حقیقی یک جواب برای β_2 خواهد بود سپس از معادله (3.41) و یا (3.42)، β_3 محاسبه می‌شود.
با قرار دادن در معادلات (3.39) و (3.35)، β_4 و β_5 محاسبه می‌شوند. و در ادامه با توجه به یکی از معادلات (3.30)، $\vec{W}$ و $\vec{Z}$ بدست می‌آیند.

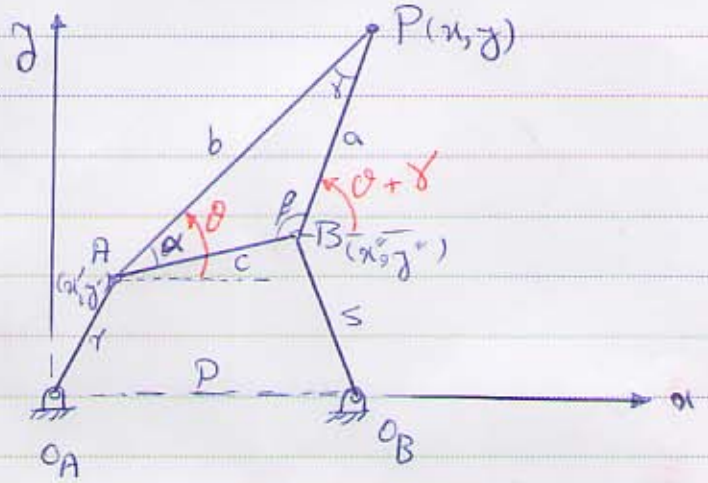
آنالیز مکانیزم ها:

Coupler curve

منحنی کوپلر:

معادله منحنی حرکت یک نقطه از کوپلر توسط محققین فراوانی مورد مطالعه قرار گرفته است در اینجا تحقیق سامویل روبرتس را که نشان داد این منحنی یک منحنی جبری از رتبه شش است و می‌تواند خط راست را با حداکثر ۶ نقطه دقت طی نماید.

اگر مکانیزم چهار میله‌ای را در دستگاه مختصات به صورت زیر نشان دهیم:



در این دستگاه O_AO_B بر محور x و عمود بر O_AO_B است.

فرض کنید که نقطه P، به مختصات (x,y) است در این صورت

مختصات نقطه A برحسب θ:
$$\begin{cases} x' = x - b\cos\theta \\ y' = y - b\sin\theta \end{cases}$$

مختصات نقطه B برحسب P:
$$\begin{cases} x'' = x - a\cos(\theta+\gamma) \\ y'' = y - a\sin(\theta+\gamma) \end{cases}$$

از آنجا که A و B بر روی دوایری به مرکز O_A و O_B دوران می‌کنند، داریم:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad \& \quad (x''-P)^2 + y''^2 = s^2$$

با جایگزین x'، y'، x'' و y'' در دو معادله فوق داریم:

$$(x - b\cos\theta)^2 + (y - b\sin\theta)^2 = r^2$$

$$[x - a\cos(\theta+\gamma) - p]^2 + [y - a\sin(\theta+\gamma)]^2 = s^2$$

حال اگر جملات به صورت معادلاتی برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = (x^2+y^2+b^2-r^2)/2b \\ [(x-p)\cos\gamma + y\sin\gamma]\cos\theta - [(x-p)\sin\gamma - y\cos\gamma]\sin\theta = [(x-p)^2+y^2+a^2-s^2]/2a \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق (برحسب دو مجهول $\cos\theta$ و $\sin\theta$) و جایگزین کردن این مقادیر در اتحاد $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$، معادله کل منحنی رابطه چهارمیلهای حاصل می‌شود.

$$\{\sin\alpha[(x-p)\sin\gamma - y\cos\gamma](x^2+y^2+b^2-r^2) + y\sin\beta[(x-p)^2+y^2+a^2-s^2]\}^2$$
$$+\{\sin\alpha[(x-p)\cos\gamma + y\sin\gamma](x^2+y^2+b^2-r^2) - x\sin\beta[(x-p)^2+y^2+a^2-s^2]\}^2$$
$$= 4k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\,[x(x-p)+y^2-py\cot\gamma]^2 \qquad (*)$$

در این معادله، k ثابت و برابر است با: $k = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

این معادله یک معادله درجه ششم (غیرخطی نسبت به هم x و هم y، $f(x,y)=0$) است. یکی از ویژگی‌های این منحنی (چون درجه ۶ است) آن است که یک خط راست را حداکثر در شش نقطه قطع می‌کند.

خواص این منحنی به روش کلی هندسی و یا تحلیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اگر متغیرهای زیر را برای سادگی معادله فوق معرفی کنیم:

$L = \sin\alpha[(x-p)\sin\gamma - y\cos\gamma]$ و $M = y\sin\beta$

$N = \sin\alpha[(x-p)\cos\gamma + y\sin\gamma]$ و $P = -x\sin\beta$

$\phi = x^2+y^2+b^2-r^2$ و $\psi = (x-p)^2+y^2+a^2-s^2$

در این صورت معادله (*) قابل نوشتن به صورت زیر است:

$$(L\phi+M\phi)^2+(N\phi+P\psi)^2-4k^2(LP-NM)^2=0 \qquad (**)$$

برای یک حالت خاص:

اگر $LP-NM=0$

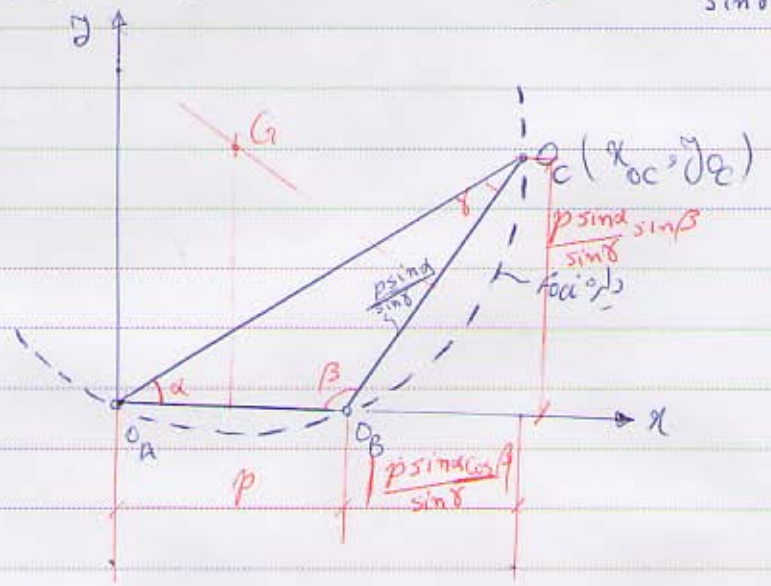
در این صورت با توجه معادله فوق عبارت زیر نیز صفر است.

$$\therefore \begin{cases} L\phi+M\phi=0 \\ N\phi+P\psi=0 \end{cases}$$

این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که:

$LP-NM=0$ جایگذاری $x(x-p)+y^2-py\cot\gamma=0$

این معادله، معادله یک دایره خواهد بود که از نقاط O_A یعنی $(0,0)$ و $O_B(p,0)$ و همچنین O_C به مختصات $\left[p\left(1-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}\right), \frac{p\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\right]$ عبور می‌کند. (مختصات بر نقطه در این معادله صدق می‌کند. که به آن دایره عطف و یا دایره Foci گفته می‌شود.



Double Points محاسبه نقاط دوگانه

نقاط دوگانه از یک منحنی نقاطی هستند که منحنی دارای شکستگی بوده و یا منحنی خودش را قطع کرده باشد

به عبارت ریاضی، نقطهٔ دوگانه نقطه‌ای است که در آن منحنی، دارای چندین مماس است. (عدم تمایز پذیری)

در اینجا برآنیم که نشان دهیم که محل تقاطع منحنی کوپر با دایره Foci یک نقطهٔ دوگانه است.

مماس بر یک منحنی به معادلهٔ $F(x,y)=0$

$\rightsquigarrow dF(x,y)=0$ را می‌توان با مساوی صفر قرار دادن دیفرانسیل تابع $F(x,y)$ بدست آورد:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$$\rightsquigarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

تعریف می‌کنند.

در یک نقطهٔ دوگانه که منحنی دارای چندین مماس است، عبارت فوق باید نامعین شود، به این معنی که

$\partial F/\partial x$ و $\partial F/\partial y$ هر دو صفر شوند تا در شرط نامعینی صدق کنند

حال اگر $F(x,y)$ را مساوی معادلهٔ کوپر یعنی رابطهٔ $(**)$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(L\varphi+M\psi)\frac{\partial}{\partial x}(L\varphi+M\psi)+2(N\varphi+P\psi)\frac{\partial}{\partial x}(N\varphi+P\psi)$$
$$-8K^2(LP-NM)\frac{\partial}{\partial x}(LP-NM)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2(L\varphi+M\psi)\frac{\partial}{\partial y}(L\varphi+M\psi)+2(N\varphi+P\psi)\frac{\partial}{\partial x}(N\varphi+P\psi)$$
$$-8K^2(LP-NM)\frac{\partial}{\partial x}(LP-NM)$$

از آنجا که نقاط تقاطع دو منحنی، با در نظر گرفتن همزمان معادلاتشان بدست می‌آیند. (تلاقی آن دو منحنی)، تلاقی منحنی کوپر و دایره برابر است با:

$$\begin{cases} LP-NM=0 \\ (L\varphi+M\psi)^2+(N\varphi+P\psi)^2-4K^2(LP-NM)=0 \end{cases}$$

قرار دادن معادلهٔ اول در دوم و از آنجا که مجموع مربعات در جمله صفر شده است لذا باید تک تک جملات صفر باشند یعنی

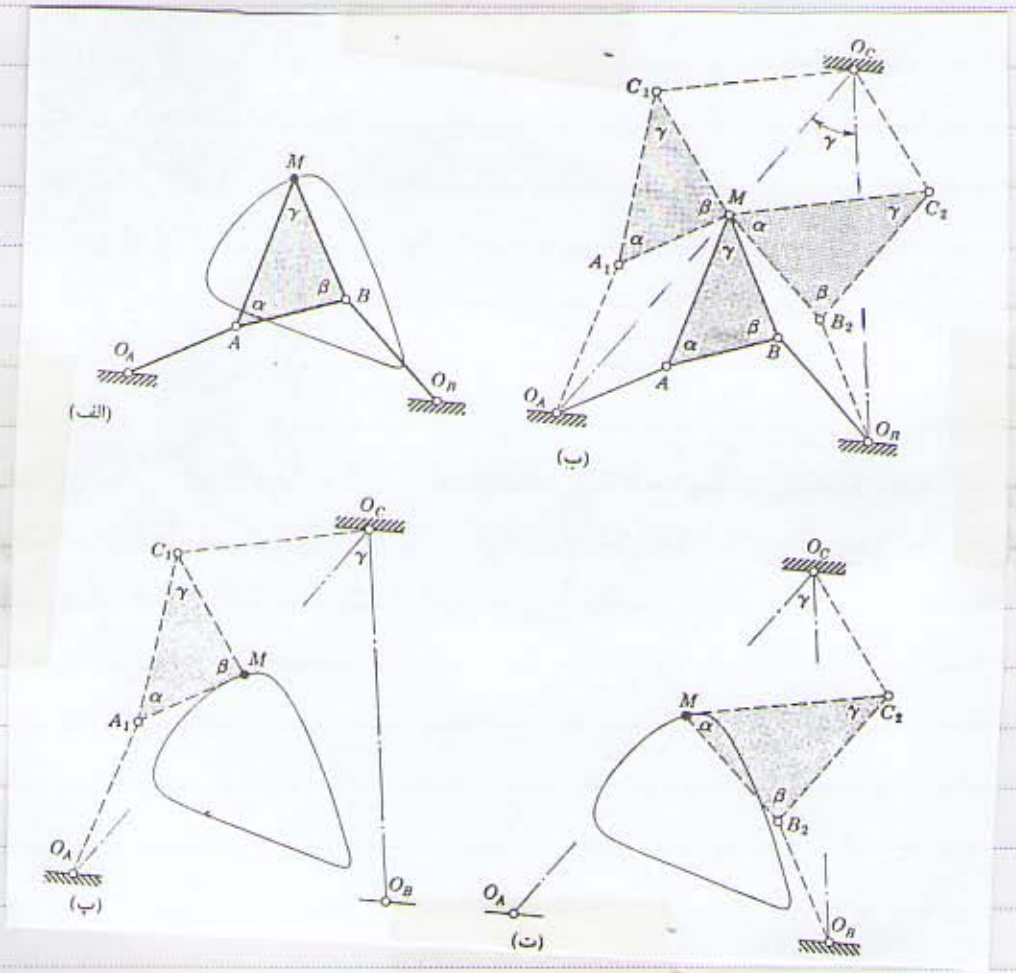
$N\varphi+P\psi=0 \quad \& \quad L\varphi+M\psi=0$

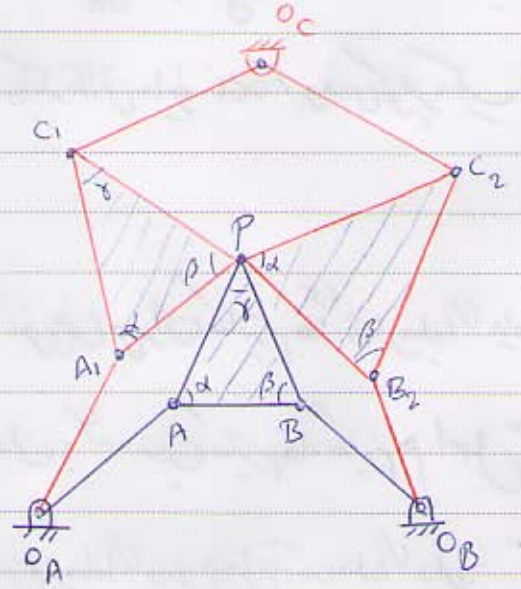
دو رابطهٔ اخیر موجب صفر شدن $\partial F/\partial x$ و $\partial F/\partial y$ می‌شوند و در نتیجه شرط نامعین بودن شیب در نقطهٔ تقاطع دو منحنی ارضا می‌شوند. یعنی اینکه تلاقی دایرهٔ Roci و منحنی کوپلر، یک نقطهٔ دوگانه است.

مکانیزم هم‌اصل:

برای یک مکانیزم چهارمیله‌ای مفروض می‌توان مکانیزم‌های چهارمیله‌ای یافت که مسیر یک نقطه از کوپلر آنها دقیقاً مسیر منحنی کوپلر مکانیزم اصلی باشد. به این مکانیزم‌ها، مکانیزم هم‌اصل "cognate" گفته می‌شود.

یک مکانیزم چهارمیله‌ای، دو هم‌اصل چهارمیله‌ای و دو هم‌اصل شش‌میله‌ای دارد.





دقت کنید که برای اثبات این امر باید نقطه O_C به صورت زیر بدست آید. پس از بدست آوردن نقاط C_1 و C_2 و شکل های کوپلر از مکانیزم های هم اصل، متوازی الاضلاعی بر روی آن بنا می کنیم (با توجه به اضلاع PC_1 و PC_2) که نقطه O_C بدست آید. در این صورت $PC_2 = C_1O_C$

مراحل رسم هم اصل:

۱- یک مثلث نظیر، کوپلر (مشابه با آن) بر روی ضلع $O_A O_B$ بنا می‌کنیم تا نقطه O_C بدست آید (از نقطه O_A زاویه α (نسبت به $O_A O_B$) و از نقطه O_B زاویه β را جدا کرده تا همدیگر را در O_C قطع کنند.)

۲- از نقطه O_B، یک خط موازی BM رسم نموده و از نقطه M یک خط موازی BO_B رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه B_2 قطع نمایند ($O_B B M B_2$) یک متوازی الاضلاع خواهد بود.

۳- با مشخص شدن MB_2، زاویه β را نسبت به آن جدا می‌کنیم (از نقطه B_2) و همچنین از نقطه M زاویه α را جدا می‌کنیم تا این دو امتداد همدیگر را در نقطه C_2 قطع نمایند (دقت کنید در نقطه M باید زاویه‌ای از کوپلر جدا شود که ترتیب زاویه‌ها حفظ گردد در اینجا α و β)

۴- با مشخص شدن C_2 و وصل کردن آن به O_C، اولین مکانیزم هم اصل بدست می‌آید. ($O_A B_2 C_2 O_C$) با کوپلر MB_2C_2

۵- به طریق مشابه با کلیک‌های سمت چپ هم اصل دوم نیز حاصل می‌شود. ($O_A A_1 C_1 O_C$) با کوپلر MA_1C_1

کاربرد مکانیزم هم اصل: از آنجا که در مکانیزم هم اصل، ابعاد آن و محل تکیه‌گاه تغییر می‌کند می‌توان در مواقعی که ابعاد و تکیه‌گاه مکانیزم اصلی مورد مطلوب ما قرار نگرفت از مکانیزم هم اصل سود جست.

قضیه: نشان دهید که منحنی کوپلر برای نقطه P در مکانیزم اصلی و مکانیزم‌های هم اصل یکسان است.

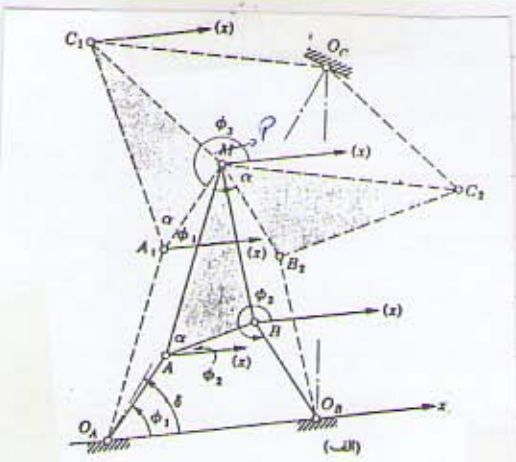
اثبات:

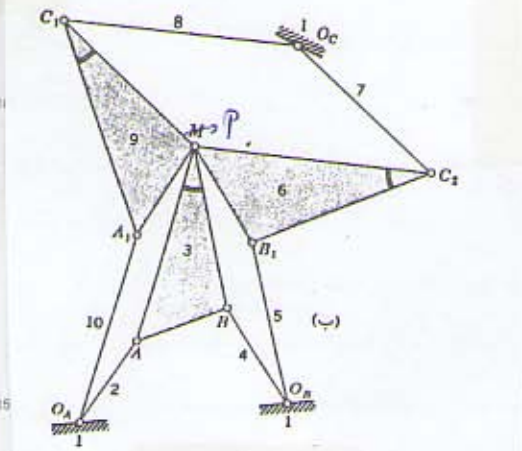
برای اثبات قضیه کافی است که نشان دهیم نقطه O_C نظیر O_A و O_B واقعاً ثابت است (شکل صفحه بعد) هرگاه مکانیزم ۱۰ میله‌ای (که ترکیب مکانیزم اصلی و هم اصل‌های آن است) دارای یک درجه آزادی است و صدور نقطه P برای آن یکی است. (در حالتی که نقطه O_C به زمین لولا نیست $n=10$ و $j=13$) در این حالت نشان می‌دهیم که O_C حرکت نمی‌کند. بنابراین صورت مسئله که مکانیزم چهار میله‌ای هم اصل در نظر گرفته شود (لولا شود) مکانیزم همان حرکت، مکانیزم ۱۰ میله‌ای را انجام می‌دهد.

اثبات این امر با روش‌های هندسی محض، کمی مشکل است در اینجا با معرفی بردار مکان O_C، نشان خواهیم داد که این بردار برحسب ابعاد مکانیزم اصلی بوده و ناتغییر خواهد بود.

$$\vec{Z} = O_A O_C e^{i\delta} = cte$$

یعنی این به آن معنی است که $O_A O_C$ و زاویه δ، باید برحسب ابعاد ناتغییر مکانیزم $O_A A B O_B$ بیان شود و مستقل از جابجایی زاویه‌های φ_1، φ_2 و φ_3 باشد.





این زاویه‌ها در جهت مثلثاتی و نسبت به x که O_AO_B موازی است سنجیده می‌شود (φ_1، φ_3 در مکانیزم‌های هم‌اصل نیز ظاهر می‌شود)

با شروع از O_A و استفاده از متوازی‌الاضلاع می‌توان نوشت:

$$\vec{z} = O_AA_1 e^{i(\varphi_2+\alpha)} + A_1C_1 e^{i(\varphi_1+\alpha)} + C_1O_C e^{i(\varphi_3+\alpha)} \quad (*)$$

از خواص متوازی‌الاضلاع و تشابه مثلث‌های کوچک می‌توان نوشت:

$(O_AA_1 = AP)$

$$\frac{A_1C_1}{A_1P} = \frac{AP}{AB} \rightarrow A_1C_1 = \frac{AP}{AB} O_AA$$

و به صورت مشابه:

$$\frac{PC_2}{PB_2} = \frac{AP}{AB} \rightarrow C_1O_C = \frac{AP}{AB} BO_B$$

$(PC_2 = C_1O_C)$

$(PB_2 = O_BB)$

و برای $O_AA_1 = \frac{AP}{AB} AB$

با جایگزینی سه عبارت فوق در معادله $(*)$ داریم:

$$\vec{z} = \frac{AP}{AB} e^{i\alpha} \left(O_AA e^{i\varphi_1} + AB e^{i\varphi_2} + BO_B e^{i\varphi_3} \right)$$

$$\vec{z} = \frac{AP}{AB} O_AO_B e^{i\alpha} = O_AO_C e^{i\delta}$$

مجموع جملات داخل پرانتز برابر O_AO_B است،

دیده می‌شود که طول $\vec{z}$ و آرگومان $\vec{z}$ برحسب ابعاد مکانیزم ثابت است از این نقطه O_C یک نقطه ثابت است

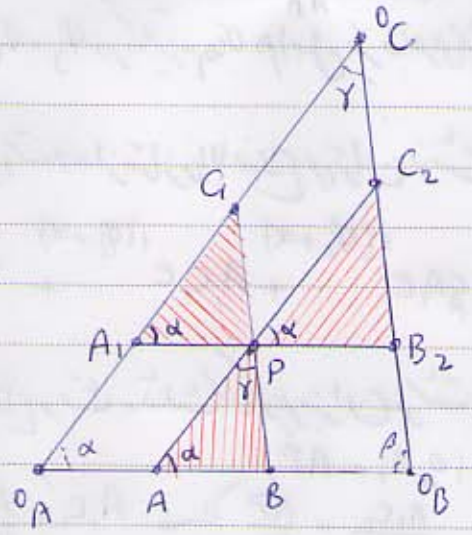
$\frac{O_AO_C}{O_AO_B} = \frac{AP}{AB}$ (تشابه مثلث‌ها) $\delta = \alpha$

علاوه بر این، این اثبات نشان می‌دهد که مثلث $O_AO_CO_B$ با مثلث کوچک نیز متشابه است و از این موضوع می‌توان محل نقطه O_C را تعیین نمود و برای این کار لازم است بر روی خط O_AO_B مثلثی متشابه با APB بسازیم که رأس فوقانی آن O_C است.

کلی: طرح ساده‌ای برای تعیین طول کنیت‌های مکانیزم هم‌اصل ارایه کرد و می‌توان روش خوابانده مکانیزم‌ها را بر یک خط راست، را معرفی کرد و برای تعیین ابعاد، از رسم خطوط موازی سود جست (پشت صفحه)

Subject :

Date : 138 / /



حالات خاص مکانیزم هم اصل:

نقطهٔ P از کوپلر می‌تواند بر روی خط AB و یا امتداد آن (خارج از فاصلهٔ A تا B) واقع شود.

برای مکانیزم هم اصل داریم: مراحل زیر:

الف- نقطهٔ C بر خط O_AO_B واقع می‌شود و فاصلهٔ آن از نسبت تشابه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{O_AC}{O_AO_B}$$

ب- O_AA_1 با AP و A_1P با O_AA موازی‌اند و از این رو A_1 تعیین می‌شود.

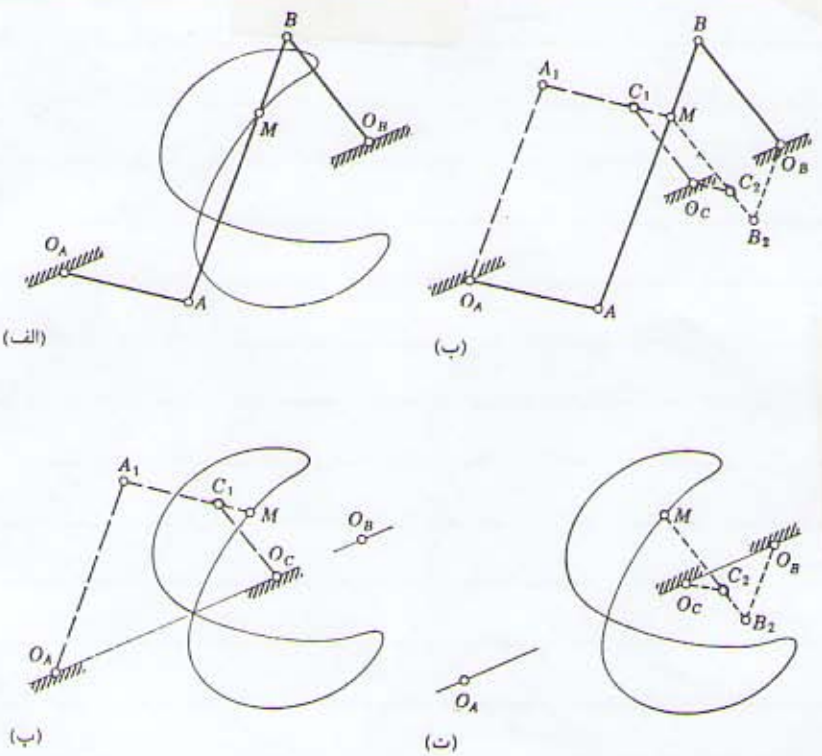
ج- O_BB_1 با BP و B_2P با O_BB موازی‌اند و از این دو B_2 تعیین می‌شود.

د- C_1 با توجه به نسبت تشابه به دست می‌آید:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1P}$$

هـ- C_2 با توجه به نسبت تشابه به دست می‌آید:

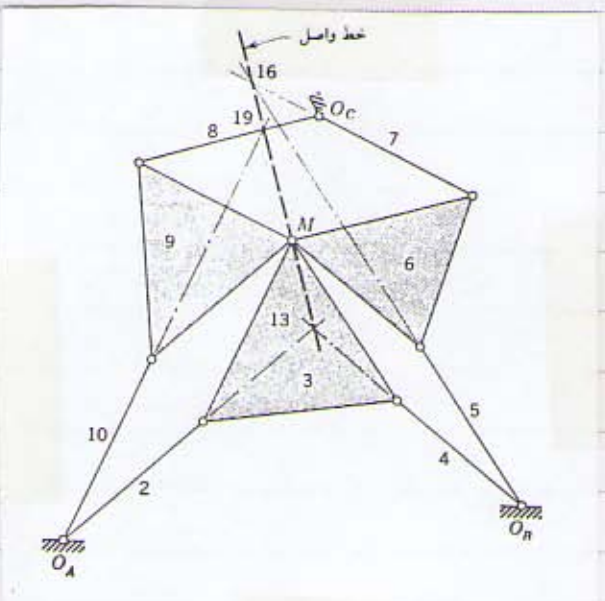
$$\frac{AP}{AB} = \frac{C_2P}{B_2P}$$



شکل (۶-۱۷) چهار میله‌ایهای هم‌اصل، M بین A و B است الف) چهار-میله‌ای مفروض ب) ترسیم هم‌اصل‌ها پ) اولین هم‌اصل ت) دومین هم‌اصل

تمرین 1: به کمک معادله منحنی کوپلر نشان دهید، مسیر نقطه P در مکانیزم اولیه و مکانیزم هم اصل یکسان است.

تمرین 2: نشان دهید که نقطه P و مراکز آنی دوران کوپلر در مکانیزم اولیه و مکانیزم های هم اصل در هر لحظه بر یک استقامت و این استقامت بر منحنی کوپلر عمود است.



شکل (۶-۱۸) هم‌خطی سه مرکز آنی، چارچوب و رابط، و نقطهٔ M.

نکته: با توجه متوازی الاضلاع های ایجاد شده در مکانیزم داریم:

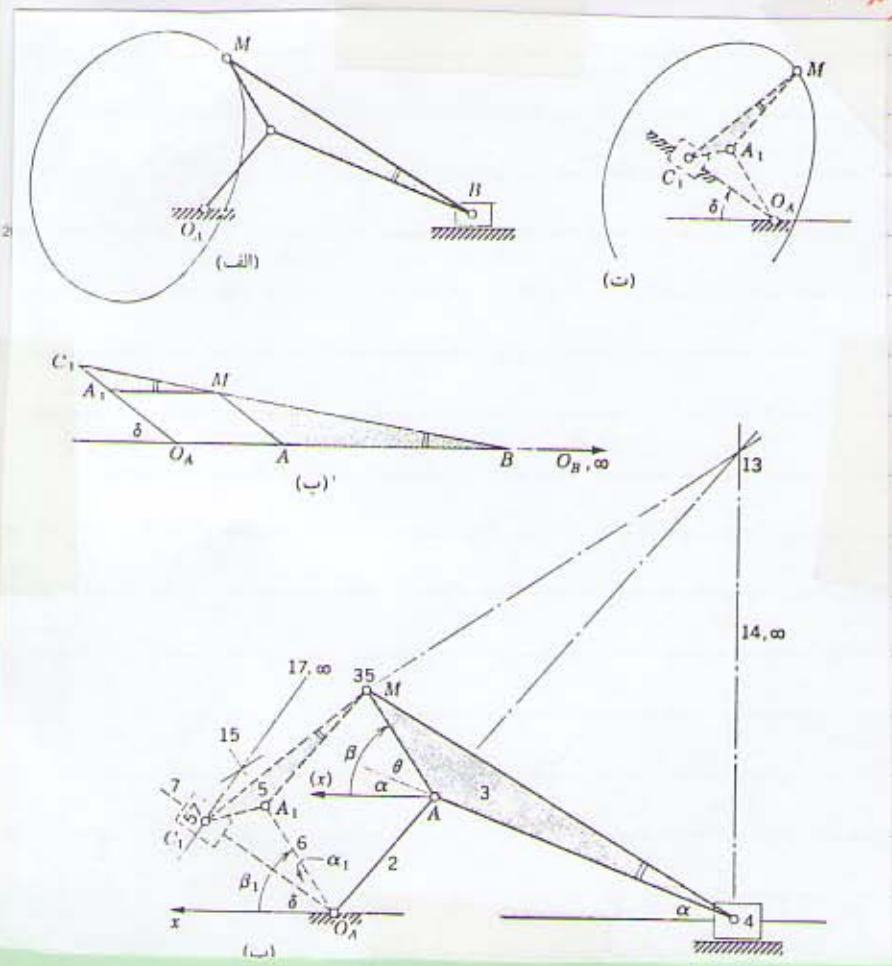
هم اصل راست مفروض هم اصل چپ

$$\omega_9 = \omega_2 = \omega_7$$

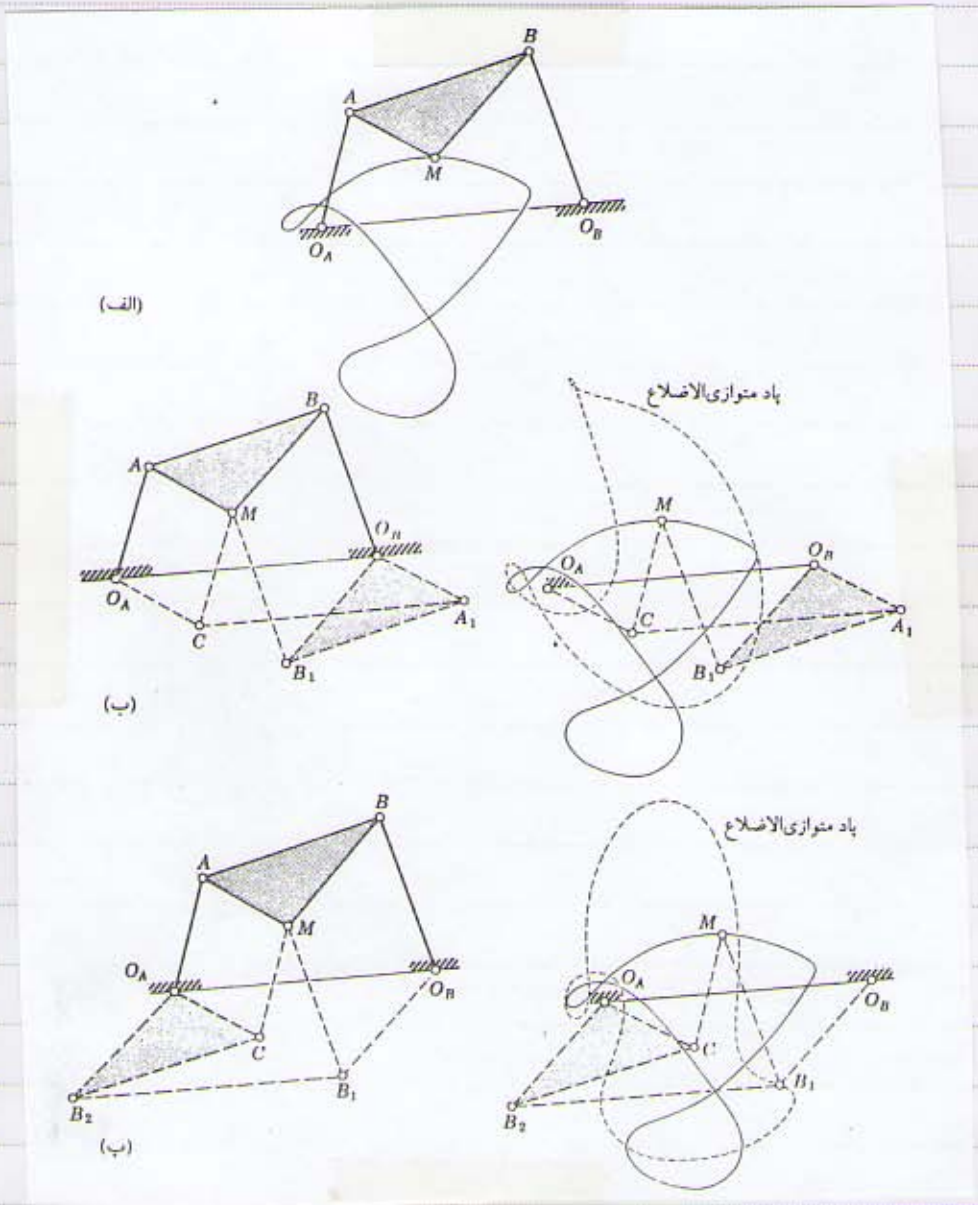
$$\omega_{10} = \omega_3 = \omega_5$$

$$\omega_8 = \omega_4 = \omega_6$$

مکانیزم های هم اصل لنگ - لغزنده:



مراحل ساختن میله‌ای یک مکانیزم چهار میله‌ای:



مراحل:

۱- از O_A و P، متوازی‌الاضلاعی بنا کنید تا C به دست آید

۲- از O_B و P، متوازی‌الاضلاعی بنا کنید تا B_1 به دست آید

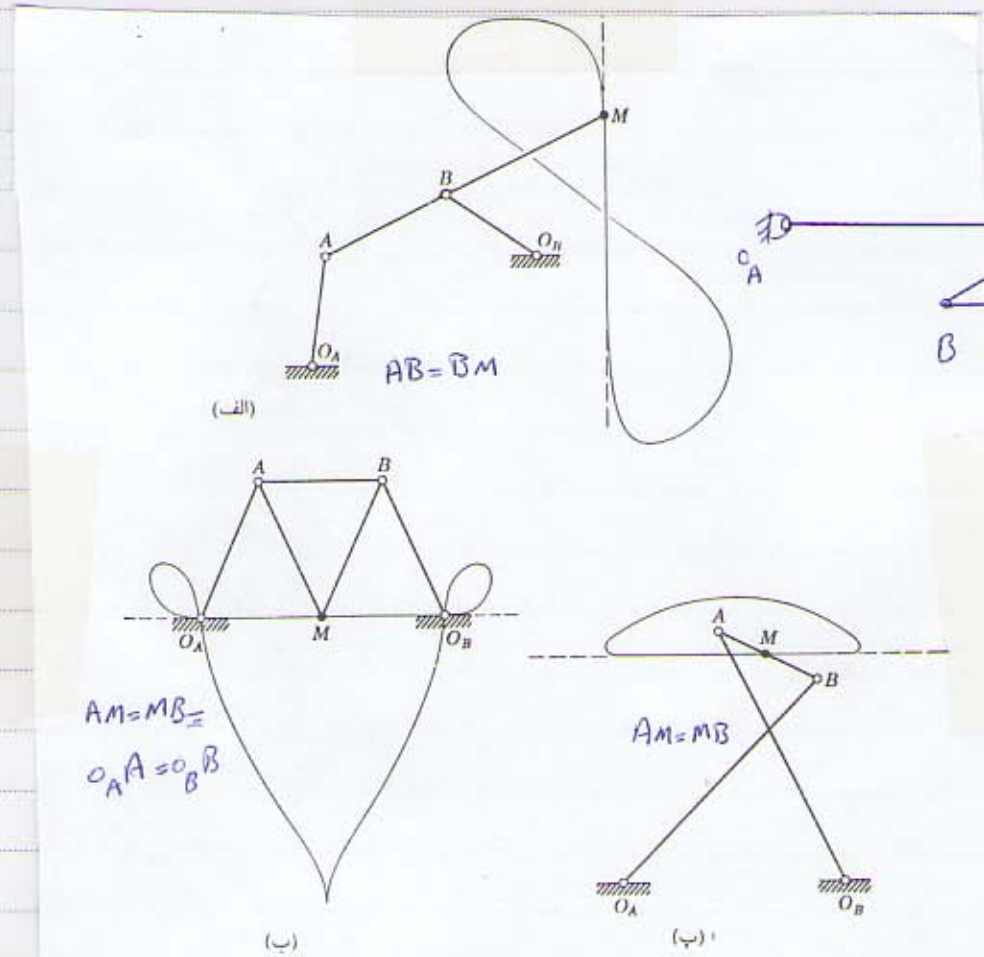
۳- لینک‌های PC و PB_1 با مفصل P، دو لینک از مکانیزم ۱ میله‌ای است

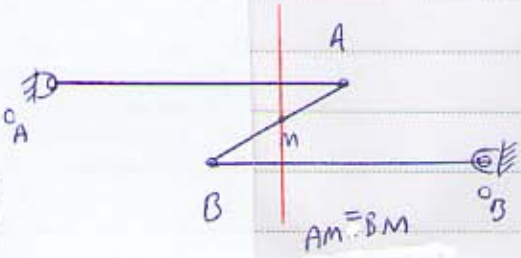
۴- مثلث $A_1O_BB_1$ را مشابه با APB رسم کنید، این مثلث نسبت به مثلث APB معکوس و وارونه است

۵- با وصل C و A_1، متوازی‌الاضلاع سوم $O_AO_BA_1C$ به دست می‌آید. وقتی از نقطه O_B استفاده می‌کنید یک دو لینکی یکسان تشکیل می‌شود. (شکل ۲)

در حالتی که نقطه P بر خط AB بین آن دو یا خارج آن دو واقع است از مدل مشابه پیروی می‌کند.

مکانیزم‌های چهارمیله‌ای جهت تحقق خط راست:





وات

شکل (۶-۲۱) حرکتهای "راست خط" مشهور به‌غیر از وات الف) اوانس یا "بندوارهٔ ملخی" ب) روبرتس پ) چبیشف

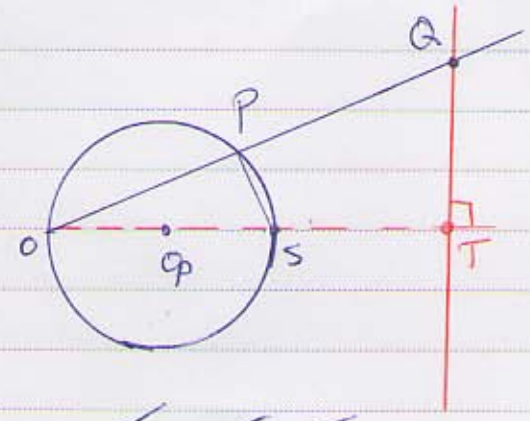
حال به دنبال مکانیزمی هستیم که یک از آن دقیقاً روی یک خط راست حرکت نماید.

تعریف: اگر دو نقطهٔ P و Q به حرکت در امتداد یک خط راست و مار بر نقطهٔ ثابت O محدود شوند و در صورتی که در رابطهٔ زیر صدق کند

$OP * OQ = K =$ ثابت (ثابت وارونگی)

در این صورت نقاط P و Q را وارون یکدیگر می‌گویند

مسئله: اگر یک نقطهٔ P یا Q بر یک دایره مار بر نقطهٔ O عبور نماید (مثلاً P) سیر نقطهٔ Q را بدست آورید؟



نقاط O و O_P ثابت هستند و $O_PP = OO_P$ به طوری که P دایره‌ای حول O حرکت می‌کند. فرض کنید Q نقطه‌ای برخط مار بر نقطه Q باشد و در رابطه $OP * OQ = K$ باشد.

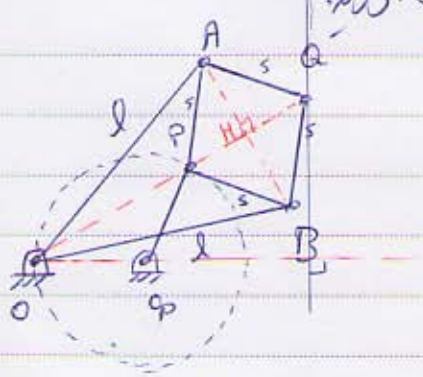
عمود QT بر OO_P مار بر نقطه Q را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که فاصله OT به ثابت K و قطر دایره بستگی دارد. به طوری که با حرکت P بر دایره، مسیر Q خط راست ثابت TQ خواهد بود.

با رسم خط PS در می‌یابیم که مثلث‌های OPS و OTQ متشابه‌اند از این رو

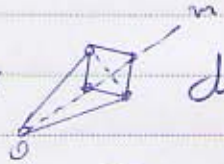
$$\frac{OP}{OS} = \frac{OT}{OQ} \rightsquigarrow \underbrace{OP * OQ}_{K} = OT * OS$$

$$\rightsquigarrow OT = \frac{K}{OS} = \frac{K}{D}$$

مثال: مکانیزم زیر را در نظر بگیرید. مسیر نقطه Q را بدست آورید.



از آنجا که سطوح



با به هم بستن یک لوزی با اضلاع S و دو میله به طول L بدست می‌آید شکل حول خط Om متقارن است. مشاهده می‌شود که سه نقطه O، P و Q، صرف نظر از آرایش لینک‌ها همواره هم خطند. حال اگر دو لینک دیگر ($O_PP = OP$) را اضافه کنیم (مکانیزم فوق) اگر ثابت کنیم حاصل ضرب $OP * OQ$ ثابت باشد آنگاه مسیر Q یک خط راست است.

$$OP * OQ = (OH - PH)(OH + PH) = OH^2 - PH^2 = (OA^2 - AH^2) - (PA^2 - AH^2)$$
$$= OA^2 - PA^2 = l^2 - s^2 = ae$$

بنابراین مسیر Q یک خط راست عمود بر خط OO_P خواهد بود.

قضیه: اگر نقطه P بر یک دایره، غیر مار بر نقطه O حرکت کند، سیر نقطه دیگر (وارون آن، Q) نیز یک دایره خواهد بود.

نقاط O و Q_P را ثابت فرض کنید و $OQ_P=d$ و $OP=r$ به طوری که P بر یک دایره حرکت کند $(r\neq d)$

فرض کنید عمل برخورد خط OP با دایره P' باشد و Q وارون P باشد

$$OP*OQ=K \qquad (1)$$

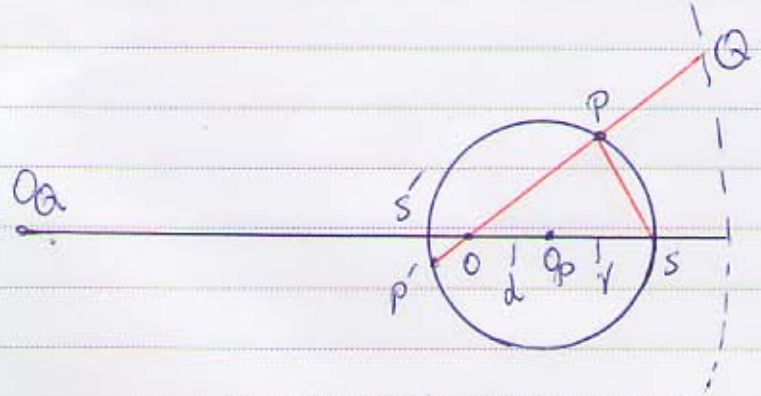
خطوط PS و P'S' را رسم کنید. مثلث‌های OPS و OS'P' متشابه هستند $(\angle P=\angle S=\frac{\overset{\frown}{PS}}{2}, \angle O=\angle O)$

$$\frac{OP}{OS'}=\frac{OS}{OP'} \rightarrow OP*OP'=OS*OS'=(d+r)(d-r)=d^2-r^2= \text{ثابت} \qquad (2)$$

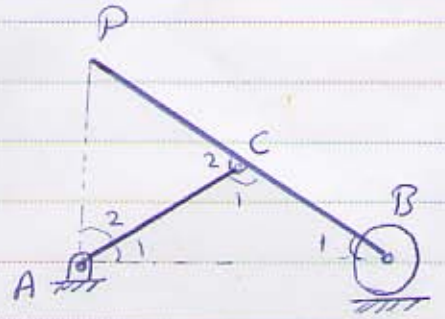
با تلفیق رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{OQ}{OP'}=\frac{K}{d^2-r^2}$$

وقتی P بر دایره‌ای به مرکز Q_P حرکت می‌کند، P' نیز بر همین دایره حرکت خواهد نمود و به علت رابطه خوق، Q باید بر یک منحنی مشابه با این دایره، با مرکز مشابه در O حرکت کند. این منحنی نیز یک دایره است و شعاع آن $R=r\left|\frac{k}{d^2-r^2}\right|$ است. در سؤال پرسیده: $k=l^2-s^2$ و $R=r\left|\frac{l^2-s^2}{d^2-r^2}\right|$. مرکز O_Q از دایره سیر Q، متناظر با مرکز O_P و با حل تناسب به دست آمده از این رابطه $\frac{OO_Q}{OO_P}=\frac{l^2-s^2}{d^2-s^2}$



مثال ۱: مسیر نقطه P از مکانیزم زیر را بدست آورید.
(مکانیزم اسکات - راسل)



$AC = BC = CP$

حل:
مسیر نقطه P یک خط مستقیم قائم است
برای اثبات این امر کافی است نشان دهیم که
زاویه PAB همواره 90° است.

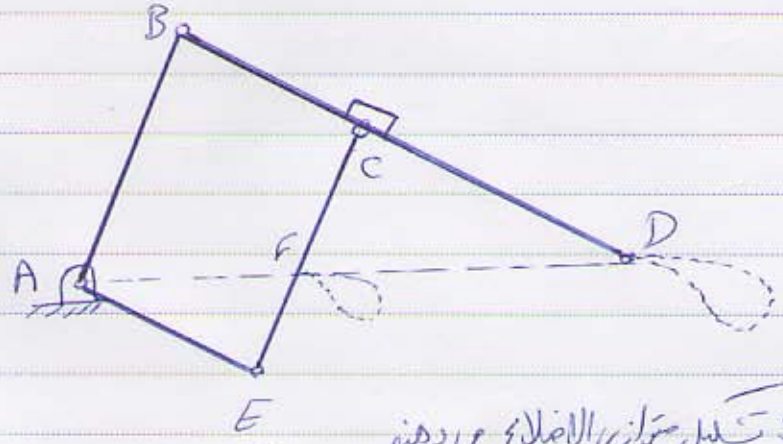
$\angle A_1 = \angle B_1 \quad ; \quad \angle A_1 + \angle B_1 = \angle C_2 \rightarrow 2\angle A_1 = \angle C_2$

$\rightarrow 2\angle A_2 = \angle C_1$

$2(\angle A_1 + \angle A_2) = \angle C_1 + \angle C_2$

$2\angle A = \pi \rightarrow \angle A = \pi/2$

مثال ۲: در مکانیزم زیر (پانتوگراف) نشان دهید که مسیر نقطه F با نقطه D یکسان است



حل: میله های 2، 3، 4، 5 تشکیل متوازی الاضلاع می دهند
و نقطه F روی تقاطع خطوط AD و CE واقع شده است. حال اگر نشان دهیم که نسبت $\frac{AD}{AF}$
در طول حرکت مکانیزم برابر یک مقدار ثابت است در نتیجه مسیر حرکت نقاط D و F کاملاً یکسان خواهد بود.

$\underset{AEF}{\Delta} \sim \underset{FCD}{\Delta} \rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{CD} = cte \rightarrow \frac{AD}{AF} = cte$

از این مکانیزم جهت ترسیم از طریق کپی نمودن آللو و یا ایجاد مجدد حرکت F در مقیاس دیگر کاربرد دارد
به عنوان از این مکانیزم ترکیبی برای اشکال پیچیده استفاده می شود.

The Euler-Savary Equation — معادله اویلر-ساواری:

در این مبحث به دنبال پیدا کردن مرکز انحنا و شعاع انحنا برای یک نقطه از جسم صلب که دارای حرکت کلی است هستیم.

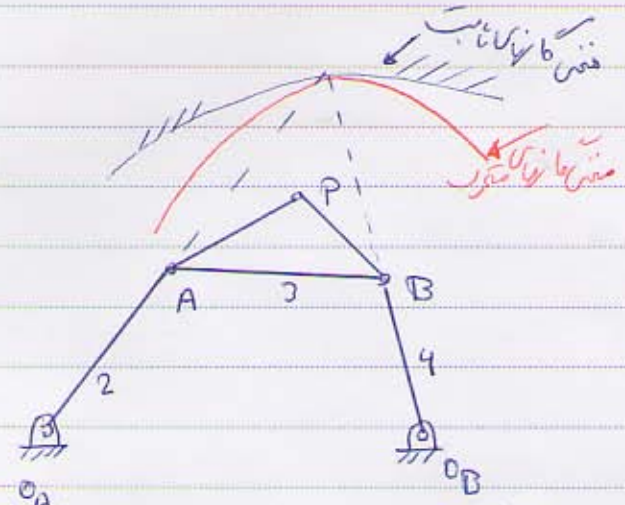
تعریف:

منحنی سانترهای ثابت (fixed centrode): مکان هندسی نقاطی (متعلق به زمین) که مرکز آنی دوران یک جسم هستند. (نقاطی ثابت که متعلق به جسم صلب نیست)

منحنی سانترهای متحرک (moving centrode): مکان هندسی نقاطی از جسم که مرکز آنی دوران جسم صلب هستند (نقاطی از جسم که در لحظات قبل، اکنون و بعد سرعت آن صفر خواهد شد)

مثال: یک دیسک که روی یک سطح اصطکاک می‌غلتد.

مثال: منحنی سانترهای ثابت و متحرک لینک 3 را رسم کنید.



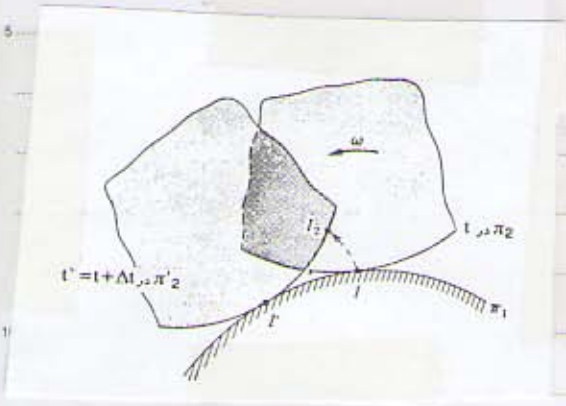
- با دانستن منحنی سانترهای ثابت و متحرک یک جسم می‌توان حرکت جسم صلب را بدست آورد. کافی است که منحنی سانترهای متحرک را بر روی منحنی سانترهای ثابت بغلتانیم. (دقت کنید حرکت کلی جسم بدست می‌آید)
- منحنی سانترهای متحرک رابطه‌ای با سرعت یک نقطه از جسم صلب ندارد.

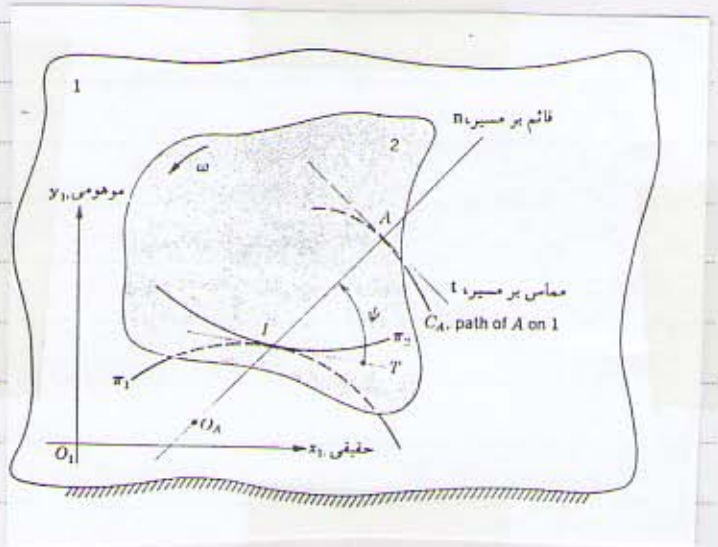
فرض کنید که صفحه 2 متحرک (در کل) و صفحه 1 ثابت است و Π_1 و Π_2 به ترتیب مرکز سانترهای ثابت و متحرک این حرکت باشند. در لحظه مورد نظر، دو مرکز آن در مرکز آنی سرعت، I، مماس هستند با حرکت صفحه 2 نسبت به صفحه 1، Π_2 با سرعت زاویه‌ای ω بر Π_1 می‌غلتد.

مرکز آنی دوران I، در طول Π_1 با سرعت V_I حرکت می‌کند.

$$V_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{II'}}{\Delta t}$$

نقطهٔ A از صفحهٔ متحرک ۲ مسیر C_A را بر صفحهٔ ۱ طی می‌کند که مرکز انحنای O_A آن در امتداد خط IA واقع می‌شود





رابطهٔ اویلر - ساواری رابطه‌ای است که بین موقعیت‌های A، I و O_A از این خط، به عبارت دیگر، انحنای مسیرهایی که نقاط صفحهٔ متحرک ایجاد کرده‌اند را به دست می‌دهد.

این معادله از روش‌های مختلفی قابل اقتباس است که در اینجا براساس استفاده از مؤلفه تانژانت a_A^n (شتاب A) صورت می‌گیرد.

شتاب مطلق نقطهٔ A برابر است با:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n$$

$$|a_A^n| = \frac{v_A^2}{AO_A}$$

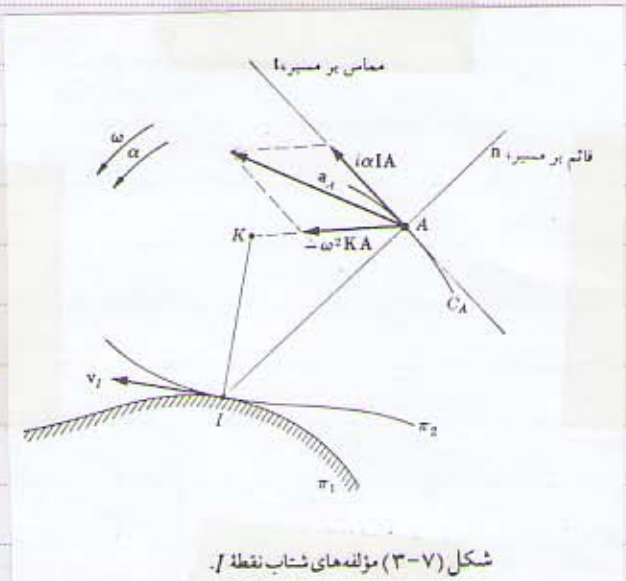
که v_A تندی سرعت نقطهٔ A برابر $v_A = IA\omega$ است و AO_A شعاع انحنای مسیر C_A در نقطهٔ A است (از زیرا a_A^t، مدنظر نیست)

$$\vec{v}_A = i\omega \vec{IA} = i\omega(\vec{O_1A} - \vec{O_1I})$$

(نقطهٔ O_1، مبدأ دستگاه مختصات)

$$\vec{a}_A = \frac{d}{dt}\vec{v}_A = i\alpha\underbrace{(\vec{O_1A} - \vec{O_1I})}_{\vec{IA}} + i\omega\left(\underbrace{\frac{d}{dt}O_1A}_{i\omega\vec{IA} = \vec{v}_A} - \underbrace{\frac{d}{dt}O_1I}_{\vec{v}_I =}\right)$$

$$\vec{a}_A = i\alpha\vec{IA} - \omega^2\left(\vec{IA} + \frac{\vec{v}_I}{\omega}\right)$$



شکل (۷-۳) مؤلفه‌های شتاب نقطهٔ I.

$\vec{IK} = -i\frac{v_I}{\omega}$ با توجه به شکل فوق می‌توان نقطهٔ K را در محل در نظر گرفت که (دقت کنید $\vec{IK}$ باید $\perp$ $\vec{v_I}$ باشد یعنی K باید عمود بر $\vec{v_I}$ و در فاصله $\frac{|v_I|}{\omega}$ اختیار شود)

$$\vec{a}_A = i\alpha\vec{IA} - \omega^2(\underbrace{\vec{IA}-\vec{IK}}_{\vec{KA}}) = i\alpha\vec{IA} - \omega^2\vec{KA}$$

مطابق رابطهٔ فوق، شتاب به صورت دو مؤلفه نشان داده شده است که بردار $i\alpha IA$ عمود بر $\vec{IA}$ است. از این رو کاملاً در امتداد مماس بر مسیر منحنی قرار می‌گیرد؛ تنها در مؤلفه $\vec{a}_A^t$ (نشان داده شده) سهیم است.

بردار $-\omega^2\vec{KA}$ در امتداد $\vec{KA}$ قرار می‌گیرد و راستای آن به طرف K است. تصاویر آن در $\vec{a}_A^t$ و $\vec{a}_A^n$ سهیم است.

شتاب عمودی a_A^n در راستای امتداد قائم یعنی از A به طرف I بوده و مقدار آن برابر است $|a_A^n| = \frac{v_A^2}{\overline{AO_A}}$

$$\|a_A^n\| = \frac{\omega^2(IA)^2}{\overrightarrow{AO_A}} = \text{تصویر}\left[-\omega^2(\vec{KA})\right]_{\vec{IA}} = -\omega^2\,\text{تصویر}\left[\vec{IA}-\vec{IK}\right]_{\vec{AI}}$$

با جهت $\vec{AO_A}$

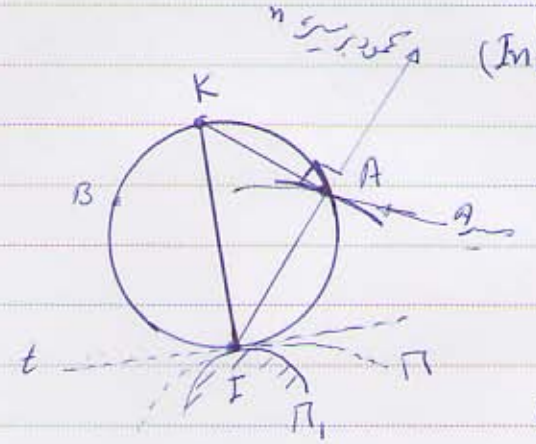
اگر تصویر $\vec{AK}$ بر روی $\vec{AI}$ را به صورت $\vec{AJ_A}$ در نظر بگیریم

$$\frac{\omega^2(IA)^2}{\overrightarrow{AO_A}} = -\omega^2(\vec{IA}-\vec{IJ_A}) = -\omega^2(\vec{J_AA}) \rightarrow \frac{(IA)^2}{\overrightarrow{AO_A}} = -\vec{J_AA}$$

یا $\overrightarrow{O_AA} = \frac{(IA)^2}{O_AA}$ یا $\frac{1}{\vec{IA}} - \frac{1}{\vec{IO_A}} = \frac{1}{\vec{IJ_A}}$

حالت خاص: وقتی که $\angle IAK = 90^\circ$ باشد.

- وضعیتی است که $\omega \vec{KA}$ - کاملاً مماس بر مسیر است یعنی هیچ مؤلفه قائمی ندارد و $\vec{a}_A^n = 0$ یعنی O_A به بی‌نهایت می‌رود ($A_{O_A \to \infty}$)
- در این حالت A بر J_A (تصویر K روی IA) منطبق می‌شود.
- اگر A به شرط $\angle IAK = 90^\circ$ باشد در این صورت A بر روی دایره‌ای با قطر IK قرار خواهد داشت.
- بنابراین مکان هندسی نقاطی که شعاع انحنای آنها بی‌نهایت است بر روی دایره‌ای به قطر IK قرار دارند که به آن دایره عطف گفته می‌شود. (Inflection circle)



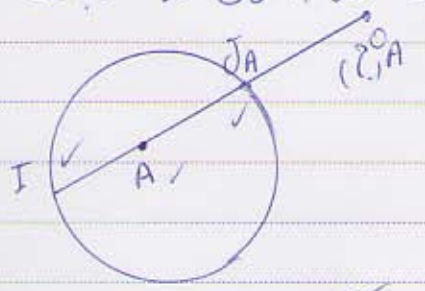
- استخراج نقطه K:

فرض کنید نقاط A، B نقاطی از جسم باشند که شعاع انحنای آنها بی‌نهایت است از این دایره عطف که از سه نقطه A، B و I می‌گذرد قابل رسم است محل تلاقی این دایره با خطی که از نقطه I می‌گذرد و خط مماس t عمود است نقطه K را معرفی کند زیرا KA روی IA تصویری ندارد.

- مراحل حل:

۱- با توجه رابطه اویلر - ساوارس $\vec{O_A A} = \frac{(IA)^2}{\vec{J_A A}}$ با داشتن سه نقطه از چهار نقطه O_A، A، I، J_A نقطه چهارم قابل استخراج است.

۲- با رسم دایره عطف، می‌توان با در نظر گرفتن جهت بردارها از رابطه فوق مرکز انحنا را بدست آورد.

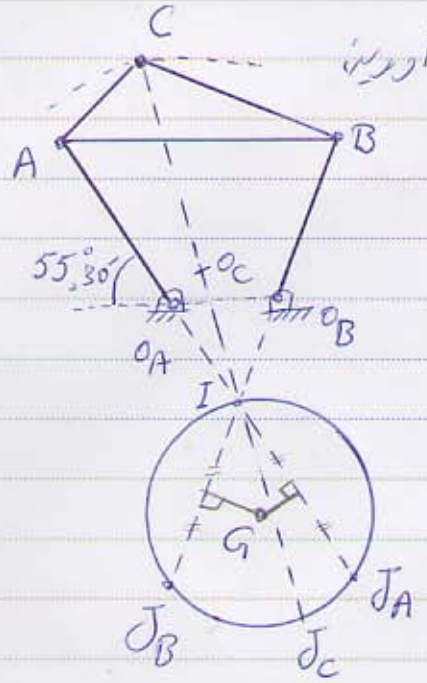


با توجه به $\vec{O_A A}$ $\xrightarrow{\text{رسم دایره}}$ $A, J_A, I = \checkmark$

جهت $\vec{J_A A}$، O_A بدست می‌آید.

- دایره عطف برای یک جسم متحرک، از حرکت معلوم برای دو نقطه از آن جسم بدست می‌آید و به کمک آن شعاع انحنای هر نقطه دیگر جسم قابل محاسبه است.

مثال ۱: مرکز انحنای نقطهٔ C از کپلر ۳ به دست آورید



$O_A O_B = 1.12''$

$O_A A = 2.03''$

$AB = 2.95''$

$AC = 1.25''$

$BC = 2.2''$

$O_B B = 1.84''$

مراحل حل:

۱- موقعیت مرکز آنی دوران I را از تلاقی $O_A A$ و $O_B B$ بیابید. این مرکز نقطه‌ای از دایره عطف است.

۲- O_A مرکز انحنای مسیر نقطهٔ A (از کپلر 3) است. نقطهٔ دوم از دایرهٔ عطف، J_A، که بر خط O_A (یا امتداد آن) قرار می‌گیرد، از معادلهٔ اویلر-ساواری به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{J_A A} = \frac{(IA)^2}{\overrightarrow{O_A A}} = 5.3''$$

۳- به طور مشابه می‌توان J_B، نقطهٔ سوم از دایرهٔ عطف، را به دست آورد.

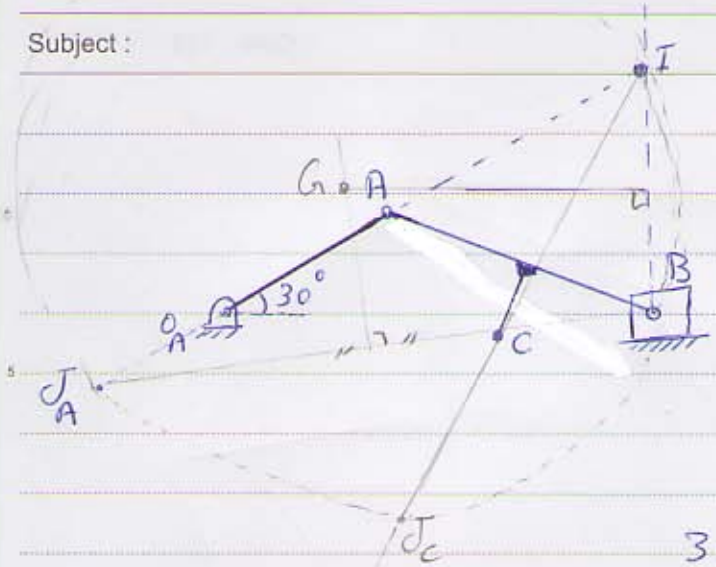
$$\overrightarrow{J_B B} = \frac{(IB)^2}{\overrightarrow{O_B B}} = 4.8''$$

۴- با سه نقطهٔ معلوم از دایرهٔ عطف، می‌توان دایره عطف را رسم نمود. مرکز آن G، محل تقاطع عمود منصف‌های IJ_A و IJ_B است.

۵- خط IC را رسم نمایید تا دایرهٔ عطف را در نقطهٔ J_C قطع نماید (یا امتداد آن). مرکز انحنای نقطهٔ C، یعنی O_C بر خط IC واقع است و با استفاده از معادلهٔ اویلر-ساواری برای سومین بار به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{O_C C} = \frac{(IC)^2}{\overrightarrow{J_C C}} = 2.3''$$

توجه کنید که $\overrightarrow{O_C C}$ و $\overrightarrow{J_C C}$ باید هم جهت باشند.



مثال ۱ مرکز انحنایی و شعاع انحنایی نقطه C را بدست آورید.

$O_A A = 2''$

$AB = 3''$

مراحل حل:

۱- تعیین نقطه I: مرکز آنی دوران کنگ 3

۲- محاسبه J_A

$$\overrightarrow{AJ_A} = \frac{IA^2}{\overrightarrow{AO_A}} = 3.48''$$

($\overrightarrow{AJ_A}$ هم جهت با $\overrightarrow{AG_A}$ است.)

۳- از آنجا که نقطه B دارای حرکت انتقالی است از این O_B در بی‌نهایت است یعنی B بر دایره عطف واقع شده است یعنی ($J_B = B$) و یا

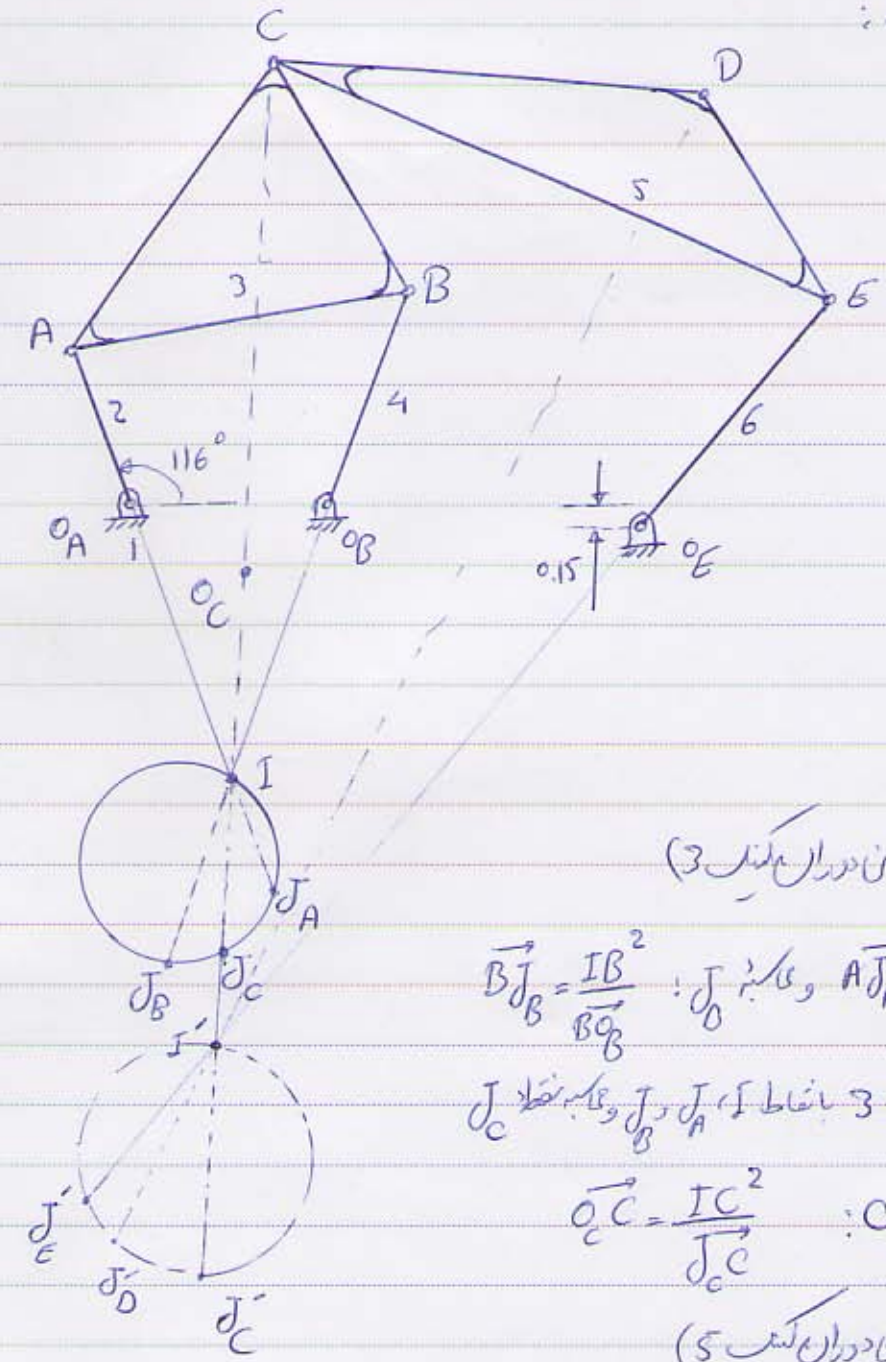
$$\overrightarrow{BJ_B} = \frac{IB^2}{\overrightarrow{BO_B}} = \frac{IB^2}{\infty} = 0$$

۴- رسم دایره عطف با نقاط J_A، B و I، رسم امتداد IC، محاسبه نقطه J_C

۵- محاسبه نقطه O_C

$$\overrightarrow{CO_C} = \frac{IC^2}{\overrightarrow{CJ_C}} = 5.49$$

مثال ۳: مطلوبست O_D:



$O_A A = 1.13''$, $CD = 3.4''$
$AB = 2.7''$, $CE = 4.8''$
$AC = 2.8''$, $DE = 1.9''$
$CB = 2.1''$ $O_E E = 2.3''$
$O_B B = 1.8''$ $O_B O_E = 2.5''$
$O_A O_B = 1.5''$

مراحل حل:

۱- محاسبه نقطه I (مرکز آنی دوران کنک 3)

۲- محاسبه J_A، $A\vec{J_A} = \frac{IA^2}{AO_A}$ و محاسبه J_B: $B\vec{J_B} = \frac{IB^2}{BO_B}$

۳- رسم دایره عطف کنک 3 با نقاط I، J_A، J_B و محاسبه نقطه J_C

۴- محاسبه مرکز انحنای نقطه C: $\vec{O_C C} = \frac{IC^2}{\vec{J_C C}}$

۵- محاسبه نقطه I' (مرکز آنی دوران کنک 5)

۶- محاسبه نقطه J'_E: $E\vec{J'_E} = \frac{\overline{EJ'_E}^2}{EO_E}$ و نقطه J'_C: $C\vec{J'_C} = \frac{I'C^2}{\vec{CO_C}}$ (دقت کنید J'_C بر روی دایره عطف کنک 3 و J'_C نقطه‌ای بر دایره عطف کنک 5 و O_C مرکز انحنای نقطه C)

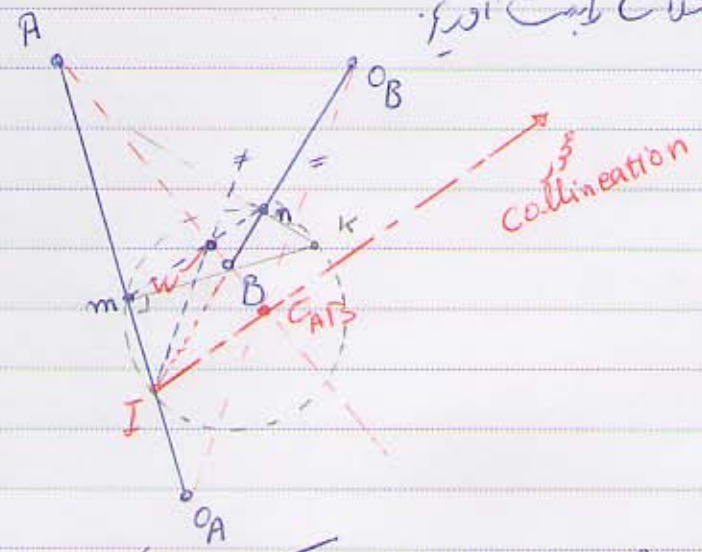
۷- رسم دایره عطف کنک 5 با نقاط: I'، J'_C و J'_E و محاسبه نقطه J'_D

۸- محاسبه مرکز انحنای نقطه D: $\vec{O_D D} = \frac{I'D^2}{\vec{J'_D D}}$

www.Mech-88.blogfa.com

قضیه Bobillier

در اینجا نقاط A، B و مرکز انحنایی آنها یعنی O_A و O_B مفروض هستند (A و B متعلق به یک جسم هستند) می‌خواهیم مرکز انحنایی هر نقطه از جسم مثلاً C را بدست آوریم.



از نقطه A به O_A متصل کرده
از نقطه B به O_B متصل کرده } تلاقی $O_A A$ و $O_B B$ نقطه I را معرفی می‌کند. (در واقع شما، دو امتداد عمود بر سرعت دو نقطه از جسم را رسم کرده اید.)

محل تلاقی خط AB با $O_A O_B$ را نقطه C_{AB} می‌نامیم، محوری که نقطه I و C_{AB} می‌گذرد را محور collineation می‌گویند.

حال اگر از نقطه I خطی موازی $O_A O_B$ شود، محل تلاقی این خط را با خط AB، نقطه W بنامیم. سپس از نقطه W خطی به موازات IC_{AB} رسم نمائیم. در این صورت خواهیم داشت:
(نقاط تلاقی این خط با خطوط $O_A A$ و $O_B B$ را به ترتیب m و n می‌نامیم.)

$$\overset{\triangle}{AIC_{AB}} \sim \overset{\triangle}{Amw} \rightarrow \frac{Am}{AI} = \frac{Aw}{AC_{AB}}$$

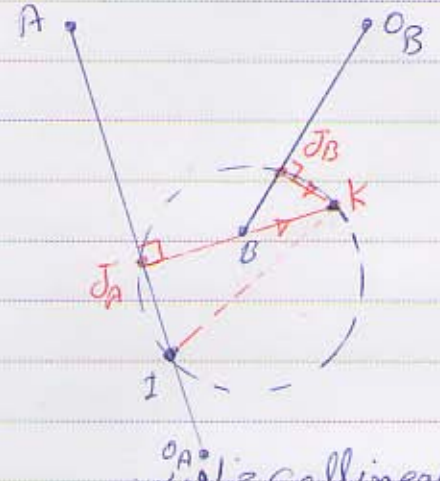
$$AO_A C_{AB} \sim AIw \rightarrow \frac{AI}{AO_A} = \frac{Aw}{AC_{AB}}$$

$$\rightarrow \frac{Am}{AI} = \frac{AI}{AO_A} \rightarrow Am = \frac{(AI)^2}{AO_A^2}$$

که معادله فوق همان رابطه اویلر ساواری است در صورتی که m همان J_A باشد.
به طریق مشابه می‌توان نشان داد که نقطه N، همان J_B است.

www.Mech-88.blogfa.com

نکته ۱: اگر نقاط $m(J_A)$ عمودی بر $O_A A$ و از نقطه $n(J_B)$ عمودی بر $O_B B$ استخراج نماییم تلاقی این دو خط نقطه K را معرفی می‌کند.



نکته ۲: به روش گفته شده می‌توان دایره عطف را رسم نمود:

۱- با امتداد دادن $O_A A$ و $O_B B$ می‌توان نقطه I را بدست آورد.

۲- محل تلاقی AB و $O_A O_B$، نقطه C_{AB} را معرفی کند و خط IC_{AB} محور Collineation خواهد بود.

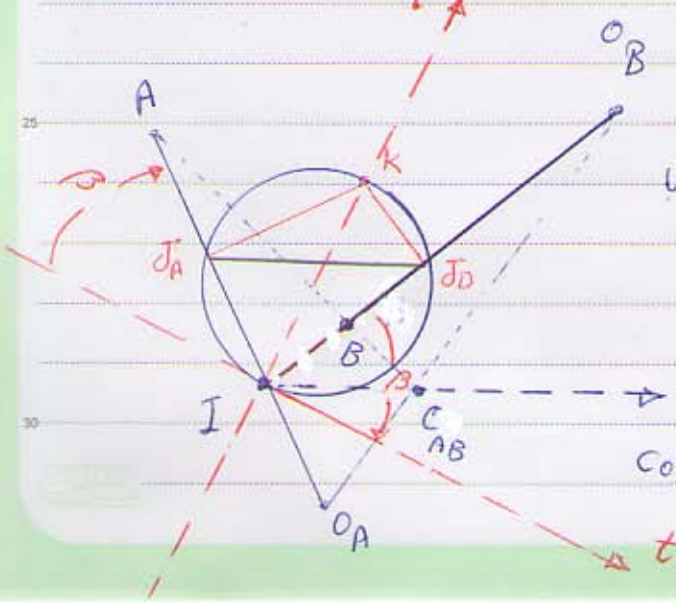
۳- با رسم خطی از نقطه I به موازات $O_A O_B$ و تلاقی آن با خط AB نقطه W بدست آید.

۴- با رسم خطی از نقطه W به موازات IC_{AB} و تلاقی آن با خط $O_A A$، J_A و تلاقی آن با خط $O_B B$، J_B بدست می‌آید.

۵- دایره عطف، دایره گذرنده از نقاط I، J_A و J_B خواهد بود.

قضیه Bobillier

اگر نقاط A، O_A، B، O_B مفروض باشند می‌توان به روش فوق J_A و J_B را استخراج و دایره عطف را رسم نمود. در صورتی که امتداد IK را محور n و عمود بر آن را محور t بنامیم در این صورت (حکم قضیه):



زاویه شعاع نقطه دیگر با خط t = زاویه شعاع یک نقطه (مثلاً O_A) با خط Collineation

محور Collineation

www.Mech-88.blogfa.com

اثبات:

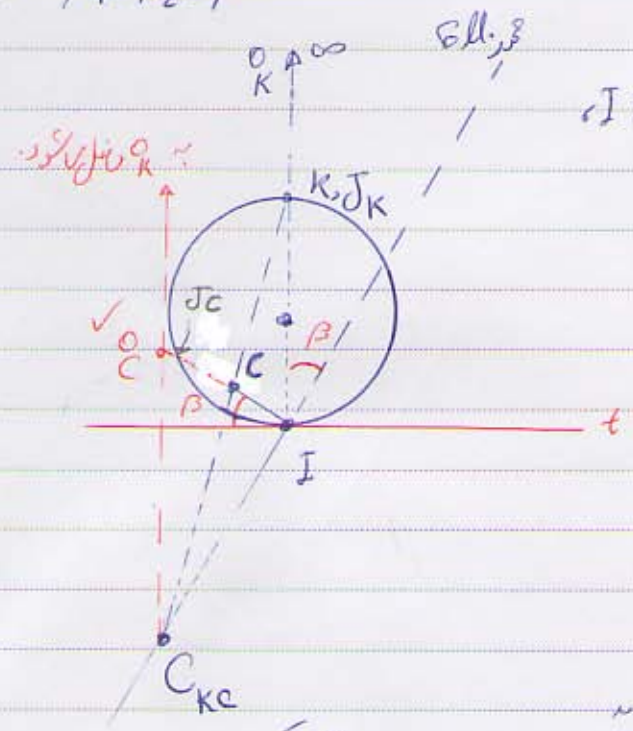
$\beta_1 =$ زاویه محیطی $= \frac{\widehat{IJ_A}}{2}$

$\hat{IJ_BJ_A} =$ زاویه مماس $= \frac{IJ_A}{2}$ $\rightsquigarrow$ $\hat{IJ_BJ_A} = \beta_1$ (1)

از طرف دیگر خط J_AJ_B موازی با خط Collineation و خط IJ_B مورب:

$\hat{IJ_BJ_A} = \beta_2$ (2)

$\rightsquigarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta$



مسئله: با فرض بودن دایره عطف و نقطه I، مرکز انحنای نقطه C را بدست آورید.

حل:

۱- با امتداد I از قطر اصلی، نقطه K بدست می‌آید

۲- چون K روی دایره است لذا O_C در بی‌نهایت و J_K بر K منطبق است

۳- رسم محور n و امتداد IK و رسم محور t عمود بر آن

۴- وصل کردن نقطه C به I و بدست آمدن زاویه β (بین IC و محور t)

۵- با داشتن زاویه β و امتداد $O_K K$ میتوان محور Collineation را رسم نمود

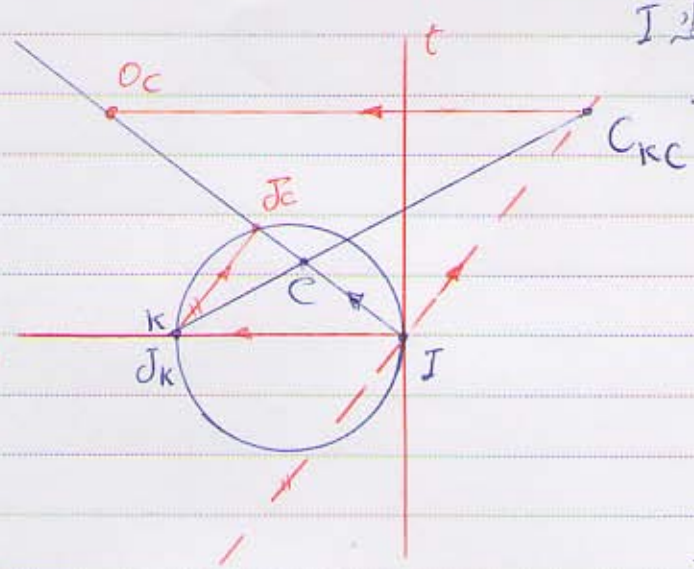
۶- امتداد خط CK و محور Coll. نقطه C_{KC} را معرفی می‌کند.

تلاقی

✓ از یک O_C روی خط IC واقع شده و از طرف دیگر روی خطی است که O_K را به C_{KC} وصل می‌کند از این روی مکان

از C_{KC} خط موازی راستای O_K که به بی‌نهایت می‌رود را ترسیم کنیم. تلاقی $O_K C_{KC}$ و امتداد IC، O_C را معرفی می‌کند.

مسئله: با داشتن دایره عطف، و نقطه I مرکز انحنای نقطه C را بدست آورید.



حل:

۱- رسم محورهای t و n و تعیین K، J_K

۲- رسم IC، منعکس کردن تلاقی آن با دایره عطف J_C

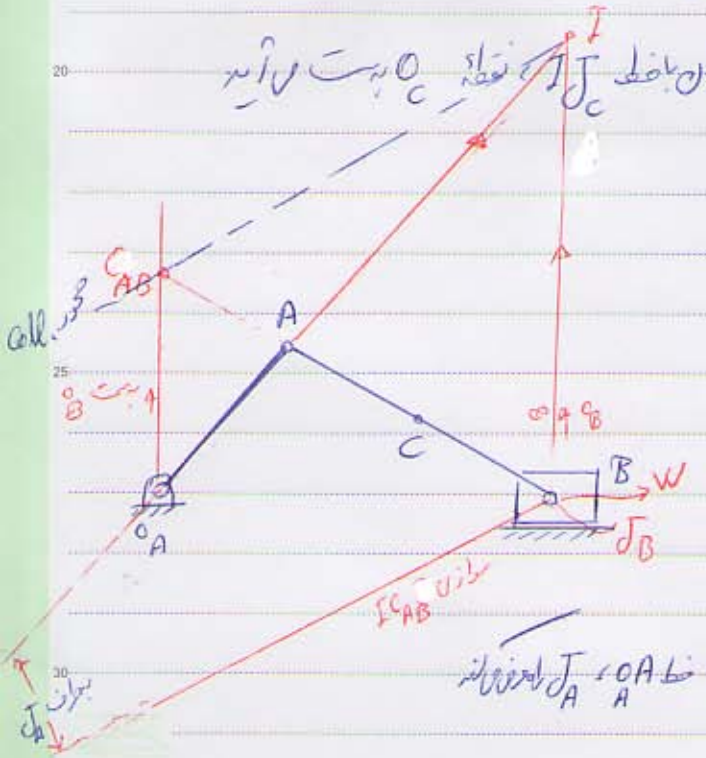
۳- رسم خط $J_C J_K$

۴- رسم خطی از نقطه I موازی $J_C J_K$ از رسم محور Coll.)

۵- تلاقی محور Coll. و خط KC نقطه C_{KC} را معرفی می‌کند.

۶- با رسم خطی از نقطه C_{KC} به موازات $O_K K$ و تلاقی آن با خط $J_C I$ نقطه O_C بدست می‌آید

مسئله: با استفاده از قضیه Bobillier و دایره عطف مرکز انحنای نقطه C را بدست آورید



حل: ۱- تعیین I،

۲- تعیین C_{AB} (تلاقی AB و $O_A O_B$)

۳- رسم محور Coll. (امتداد IC_{AB})

۴- تعیین نقطه W (تلاقی امتداد خط موازی $O_A O_B$ از نقطه I و خط AB)

۵- رسم خطی به موازات IC_{AB} از نقطه W و تلاقی آن با خط $O_A A$، J_A را معرفی می‌کند

۶- رسم دایره عطف از J_A، J_B و I

Subject : Date : 138 / /

۷- از I به C وصل کرده تا امتداد آن دایرهٔ عطف را در J_C قطع کند.

۸- از J_A و J_B بر خطوط OA و OB عمود استخراج کرده تا K بدست آید ($J_K = K$)

۹- از I خطی به موازات $J_C J_K$ رسم نموده تا امتداد KC را در نقطهٔ C_{KC} قطع کند

۱۰- از نقطهٔ C_{KC} خطی به موازات IK رسم نموده تا خط CJ_C را در نقطهٔ C قطع نماید.

www.Mech-88.blogfa.com