

✓ مواد پهنی :

①- مواد نرم یا چکش خوار (مانند فولاد ساختمانی) :

این مواد تا نقطه گسیختگی در آزمایش کش ساده تغییر طول زیادی بدست می آورند. همچنین خواص مکانیکی این مواد در کش و فشار یکسان است.

* در این گونه مواد، معیار زوال یا شکست، تنش تسلیم (σ_y) می باشد.

② مواد ترد یا شکننده (مانند چدن) :

این مواد در آزمایش کش ساده قبل از اینکه تغییر طول محسوسی بدست آورند، گسیخته می شوند. در ضمن خواص مکانیکی آنها در کش و فشار یکسان نیست.

* معیار زوال در مواد ترد، تنش نهایی (σ_u) می باشد.

✓ معیارهای زوال :

برای مواد نرم یا چکش خوار

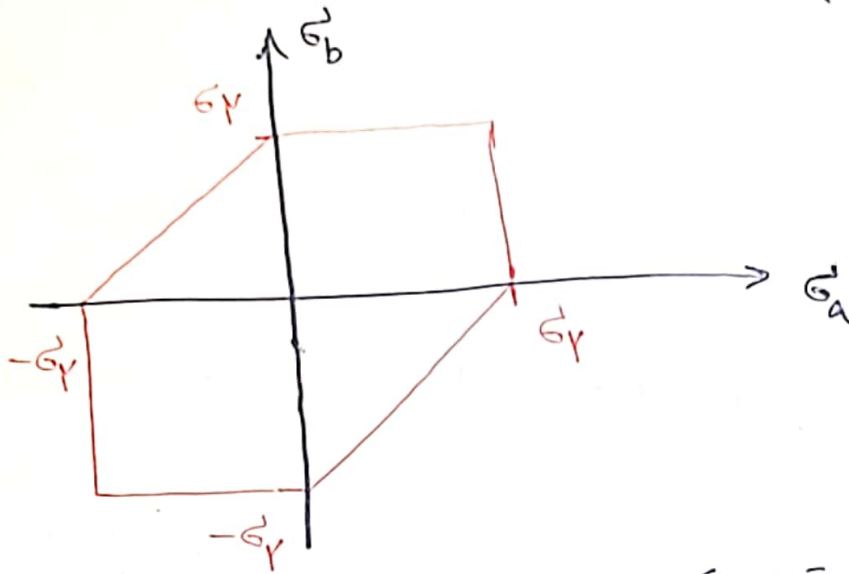
- ۱- تنش برشی حداکثر یا معیار تراشکا
- ۲- انرژی تغییر شکلی حداکثر یا معیار ون مسیز

برای مواد ترد یا شکننده

- ۱- تنش اصلی حداکثر یا معیار رانکین
- ۲- معیار مور

✓ تنش برشی حداکثر یا معیار تراشکا (برای مواد نرم یا چکش خوار)

بر اساس این نظریه، تسلیم شدن مواد نرم فقط بستگی به تنش برشی حداکثر (τ_{max}) دارد.

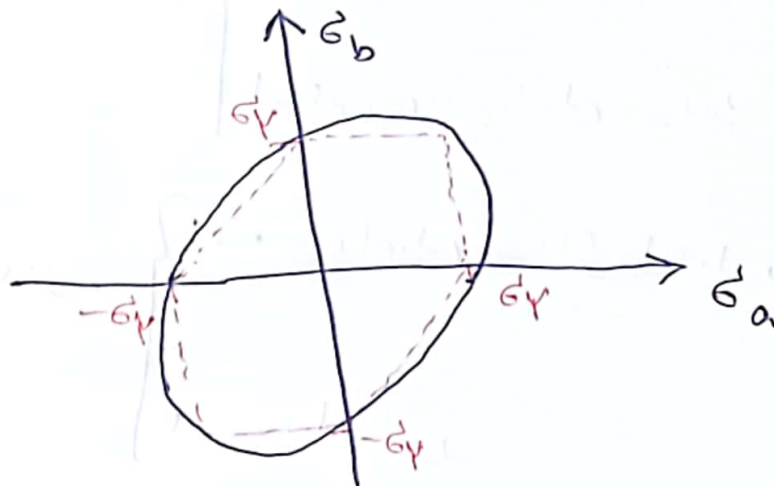


* σ_y و τ_{max} تنش های اصلی هستند.

$$F.S = \frac{\frac{1}{2} \sigma_y}{\tau_{max}} \rightarrow \begin{cases} \text{اگر } F.S > 1 \rightarrow \text{چشم به مرور تسلیم نمی‌شود است.} \\ \text{اگر } F.S < 1 \rightarrow \text{چشم تسلیم شده است.} \end{cases}$$

✓ معیار انرژی تغییر شکل حداکثر یا ون میسن

این معیار بر اساس انرژی که باعث تغییر شکل چشم می‌شود، استوار است.



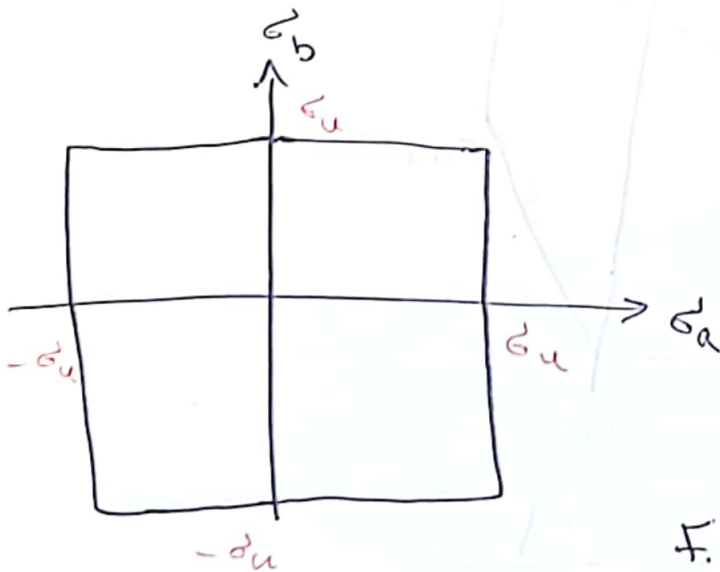
در حالت سه بگری:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_y}{F.S} \right)^2 &= \frac{(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2}{2} && \text{بر اساس تنش های اصلی} \\ \left(\frac{\sigma_y}{F.S} \right)^2 &= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2} && \text{بر اساس تنش های:} \end{aligned} \right.$$

در حالت دو بگری:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 &= \left(\frac{\sigma_y}{F.S} \right)^2 && \text{بر اساس تنش های اصلی} \\ \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 &= \left(\frac{\sigma_y}{F.S} \right)^2 && \text{بر اساس تنش های} \end{aligned} \right.$$

✓ معیار تنش عمودی حداکثر مایرانگین:

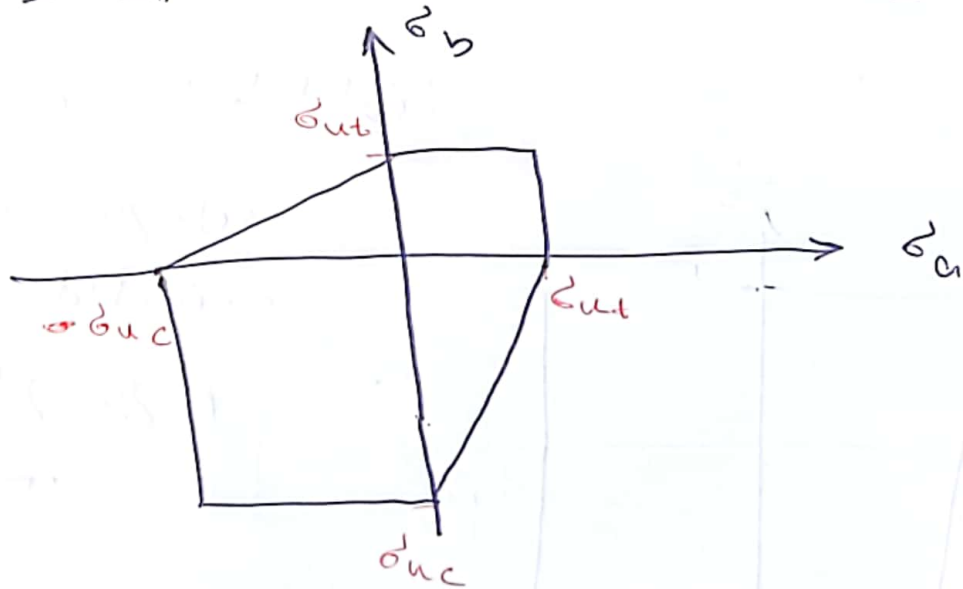


این معیار در نقاطی که در ربع اول و سوم قرار دارند، قابل اطمینان بوده و برای نقاط راقع در ربع دوم و چهارم معتبر نیست.

$$F.S. = \frac{\sigma_u}{\sigma_{max}}$$

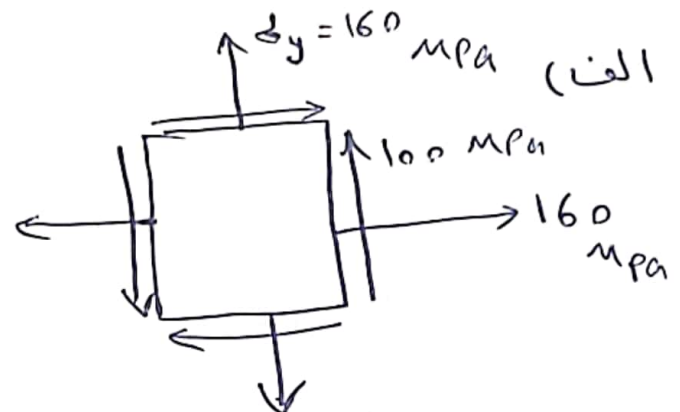
(2)

در معیار تنش عمودی حد اکثر، یک اشکال مهم وجود دارد در آن است که استحکام نهایی ماده در کشش و فشار یکسان فرض شده است. در حالی که استحکام فشاری اجسام ترد معمولاً چند برابر قدرت کششی است. زیرا به دلیل وجود ترک های میکرو و ماکرویی و درزهای ریز، مقاومت آنها در کشش کاهش می یابد. در صورتیکه این عوامل تأثیر چندانی بر مقاومت آنها در مقابل فشار ندارند. بنابراین در ناحیه اول رسم، معیار تنش عمودی حد اکثر که هر دو تنش اصلی هم علامت می باشند، اعتبار خواهد داشت ~~اما~~ اما در ناحیه دوم و چهارم که در آن تنش های اصلی مختلف علامت اند، این نظریه ~~معتبر~~ ~~نیست~~ ~~بسیار~~ ~~معتبر~~ نیست. در این نواحی می توان توسط معیار مور، تأثیر تنش های صفحه ای را برای مواد ترد پیشگویی کرد.



$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ut}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{uc}} = \frac{1}{F.S}$$

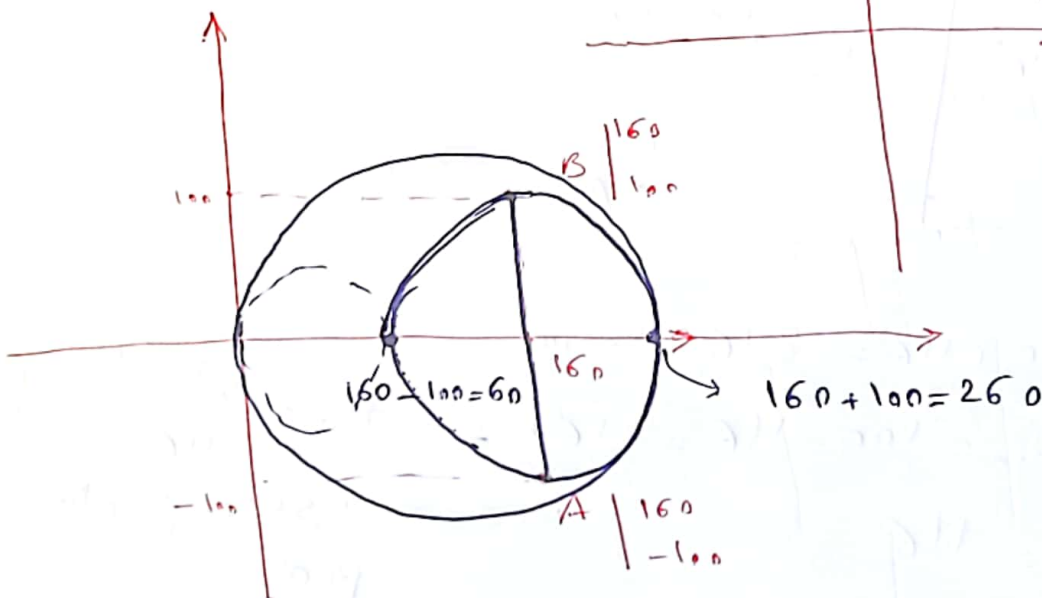
مثال: حالت تنش منته ای در یک عنصر فولادی با قدرت تسلیم 250 MPa داده شده است. با استفاده از معیار تنش برشی حداکثر تعیین کنید آیا تسلیم رخ می دهد یا نه؟



محصولات نقاط مربوط
به دایره مور:

A	160
B	-100

B	160
A	100



$$\begin{cases} \sigma_a = \sigma_{\max} = 160 + 100 = 260 \\ \sigma_b = \sigma_{\min} = 0 \end{cases}$$

③ $\tau_{\max} = \text{نصف دایره بزرگ} = \frac{260}{2} = 130 \text{ MPa}$

طبیعی تنش برشی
حد اکثر

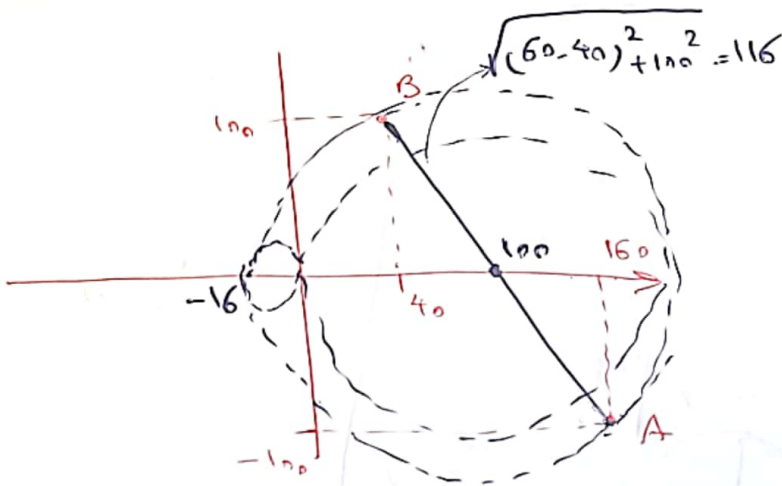
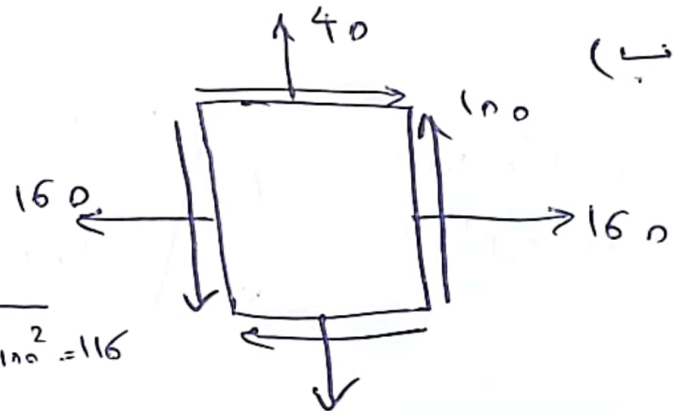
$$F.S = \frac{\frac{1}{2} \sigma_y}{\tau_{max}} = \frac{125}{130}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 250}{130} < 1$$

لے تسلیم رخ نہ دے

محکمات نقاط
دائرہ سر

$$A \begin{vmatrix} 160 \\ -100 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 40 \\ 100 \end{vmatrix}$$

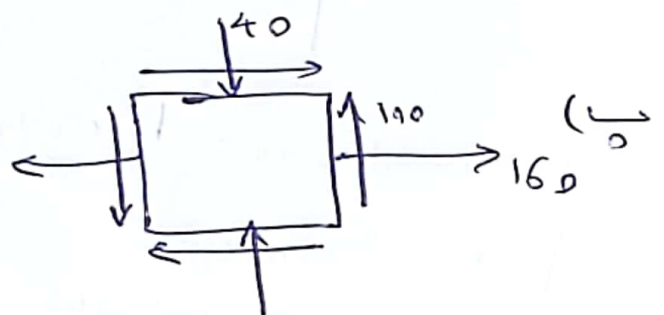


$$\begin{cases} \sigma_a = 100 + 116 = 216 = \sigma_{max} \\ \sigma_b = \sigma_{min} = 100 - 116 = -16 \\ \tau_{max} = 116 \end{cases}$$

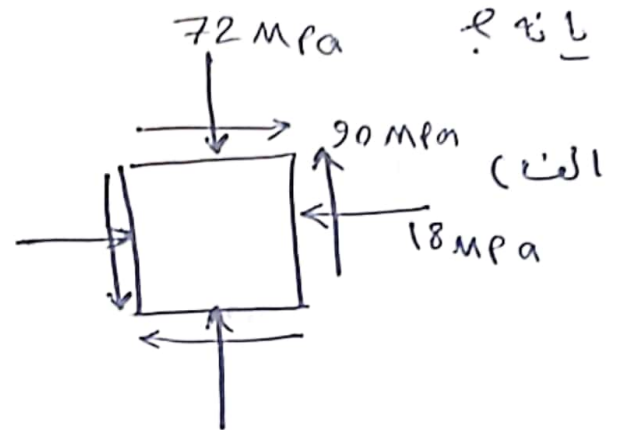
$$F.S = \frac{\frac{1}{2} \times 250}{116} > 1$$

لے تسلیم رخ نہ دے

جواب : رخ نہ دے



مثال: حالت تنش صاف ای در یک عنصر فولادی با قدرت تسلیم 216 MPa داده شده است. با استفاده از معیار انرژی تغییر شکلی حد اکثر تعیین کنید آیا تسلیم رخ می دهد یا نه؟



معیار انرژی تغییر شکلی حد اکثر یا درون مسیر در حالت درجه‌ای بر اساس تنش

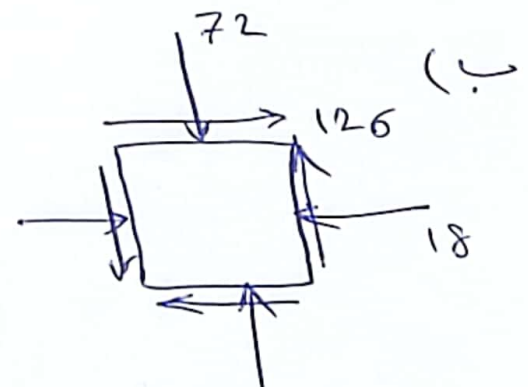
$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_y}{F.S}\right)^2$$

$$(-18)^2 - (-18) \times (-72) + (-72)^2 + 3 \times 90^2 = \left(\frac{216}{F.S}\right)^2$$

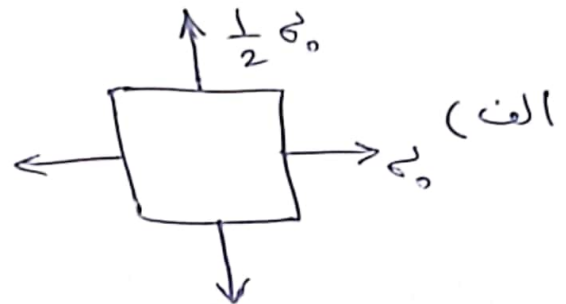
$$\Rightarrow F.S = 1.29 > 1$$

تسلیم رخ می دهد.

جواب نهی رخ می دهد.



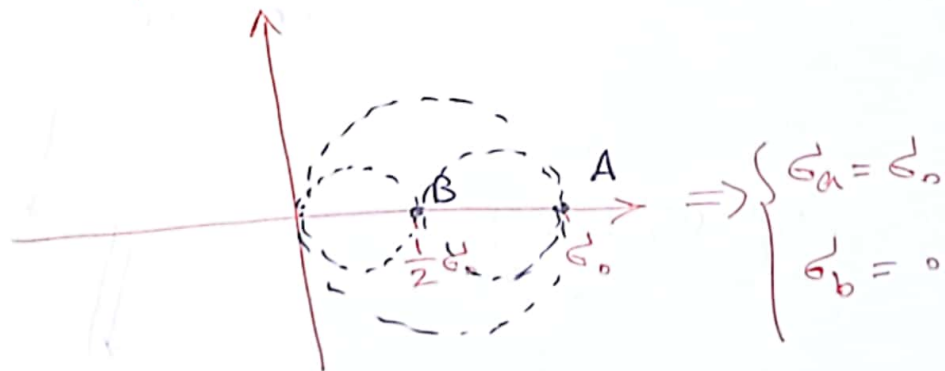
مسئله: حالت تنش منتهای نشان داده شده در شکل زیر در یک قطعه چدنی با استحکام نهایی در کشش و فشار به ترتیب 50 MPa و 125 MPa رخ دهد. با استفاده از معیار مور، مقدار σ_0 را که منجر به کسختگی می شود را بیابید.



$$\text{معیار مور} \rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_{ut}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{uc}} = \frac{1}{F.S} \quad (*)$$

$$\sigma_{uc} = 50 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_{uc} = -125 \text{ MPa}$$

مختصات نقاط در دایره مور: $A \mid \sigma_0$, $B \mid \frac{1}{2} \sigma_0$



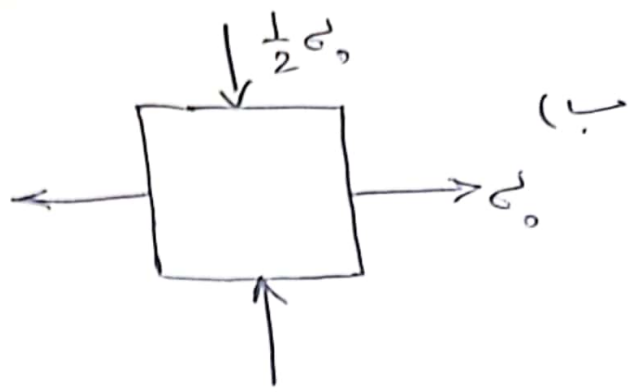
$$\frac{\sigma_0}{50} + \frac{0}{-125} = \frac{1}{F.S}$$

در اینجا $(*)$ قرار می دهیم

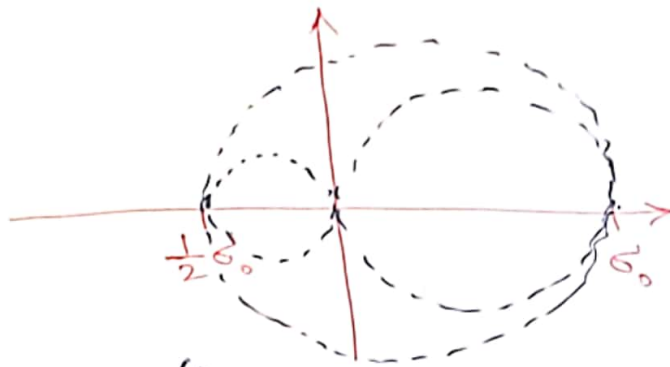
$$\left(\begin{array}{l} \text{در مرز کسختگی یعنی} \\ F.S = 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\sigma_0}{50} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_0 = 50 \text{ MPa}}$$



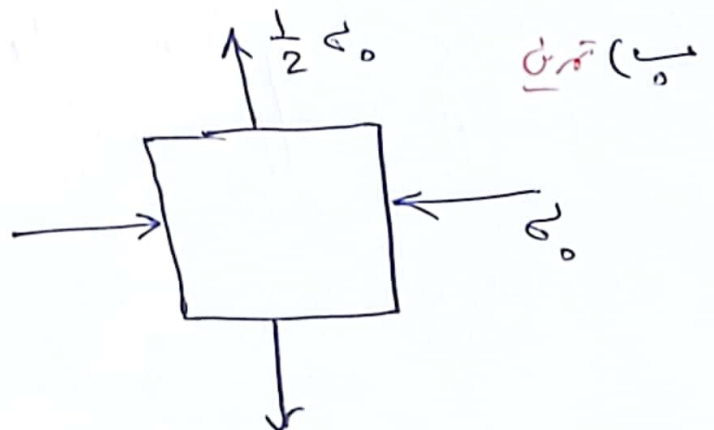
مختصات نقاط در راستای محور $\rightarrow A \begin{vmatrix} \sigma_0 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \sigma_0 \\ 0 \end{vmatrix}$



$\sigma_a = \sigma_0, \sigma_b = -\frac{1}{2} \sigma_0$

$$\frac{\sigma_0}{50} + \frac{-\frac{1}{2} \sigma_0}{-125} = \frac{1}{1} \Rightarrow \sigma_0 = 41.7 \text{ MPa}$$

جواب: $\sigma_0 = 55.6 \text{ MPa}$



(5)

✓ تبدیل کرنش منمادی:

① با استفاده از فرمول

$$\Sigma_{x'} = \frac{\Sigma_x + \Sigma_y}{2} + \frac{\Sigma_x - \Sigma_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\Sigma_{y'} = \frac{\Sigma_x + \Sigma_y}{2} - \frac{\Sigma_x - \Sigma_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

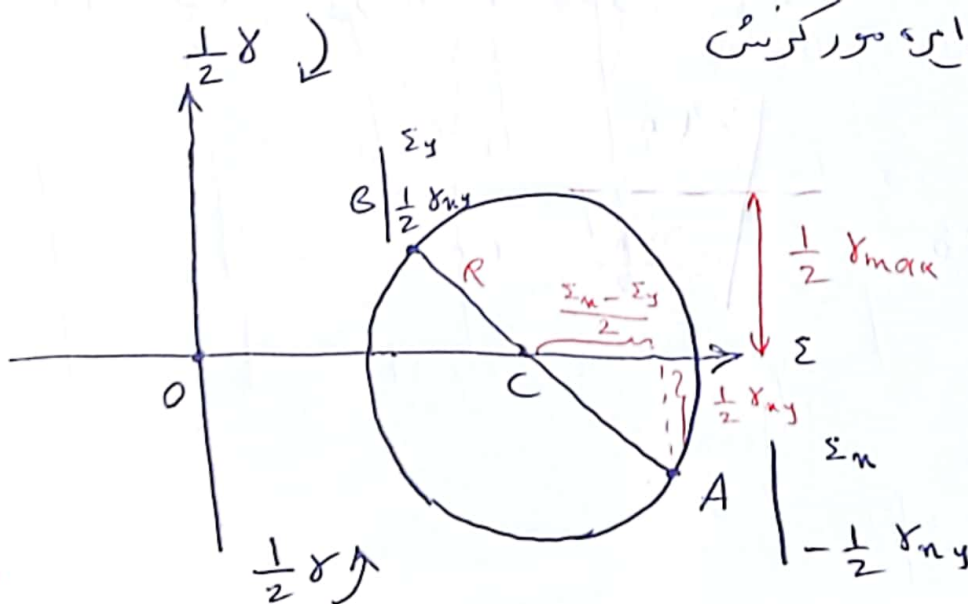
$$\Sigma_{x'} + \Sigma_{y'} = \Sigma_x + \Sigma_y$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = - \left(\frac{\Sigma_x - \Sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\Sigma_x - \Sigma_y}$$

$$\tan 2\theta_s = - \frac{\Sigma_x - \Sigma_y}{\gamma_{xy}}$$

② با استفاده از دایره مور کرنش



⑥

$$OC = \Sigma_{ave} = \frac{\Sigma x + \Sigma y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\Sigma x - \Sigma y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\Sigma_{max} = \Sigma_{ave} + R$$

$$\Sigma_{min} = \Sigma_{ave} - R$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{max} = R$$

مثال: در یک نقطه از جسم تغییر شکل پذیر، که در حالت کرنش صفای است، کرنش های زیر نسبت به محورهای x و y داده شده اند:

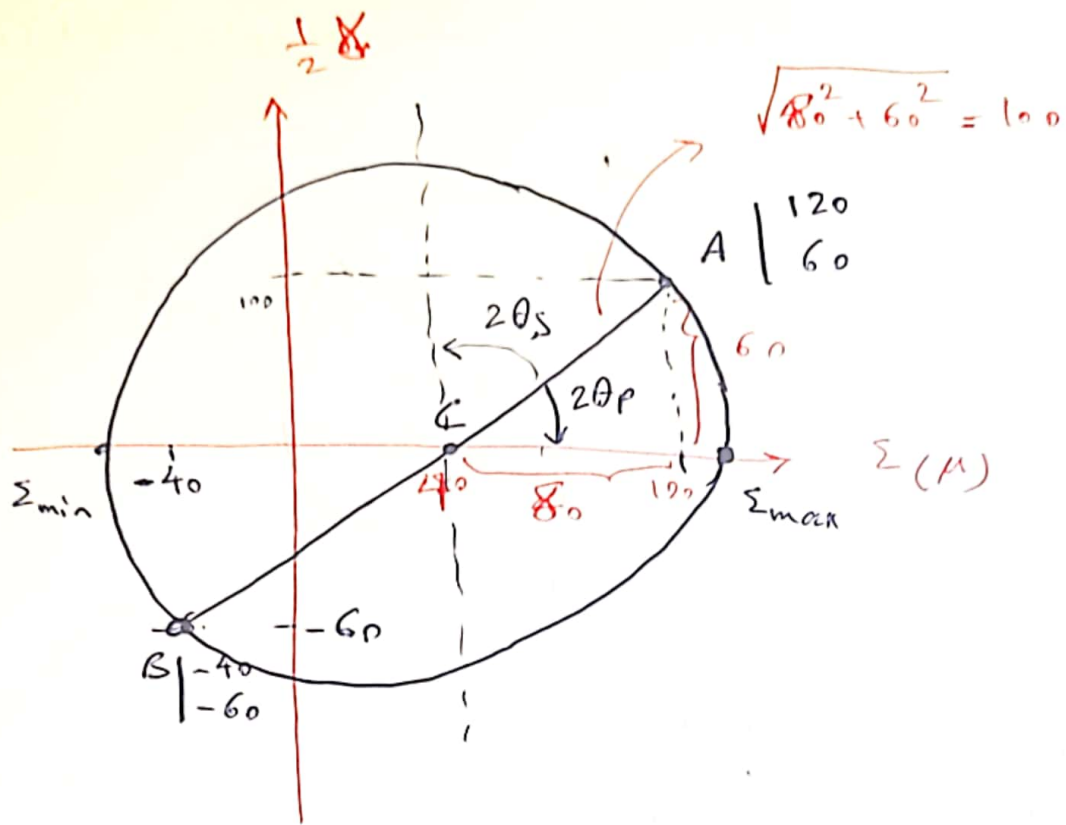
$$\Sigma_x = 120 \mu, \quad \Sigma_y = -40 \mu, \quad \gamma_{xy} = -120 \mu$$

الف) کرنش های اصلی و امتداد های اصلی را بیابید.

ب) کرنش برشی حداکثری در منته همراه با کرنش عمودی مربوطه را بدست آورید.

پ) کرنش عمودی و برشی در امتداد n که زاویه 30° در جهت حرکت عقربه های ساعت با محور x می سازد را بیابید.

$$A \left| \begin{array}{c} 120 \\ \frac{120}{2} = 60 \end{array} \right. , \quad B \left| \begin{array}{c} -40 \\ -\frac{120}{2} = -60 \end{array} \right.$$



$$\Sigma_{ave} = C = \frac{120 + (-40)}{2} = 40$$

$$\Sigma_{max} = \Sigma_a = \Sigma_{ave} + R = 40 + 100 = 140 \mu$$

$$\Sigma_{min} = \Sigma_b = \Sigma_{ave} - R = 40 - 100 = -60 \mu$$

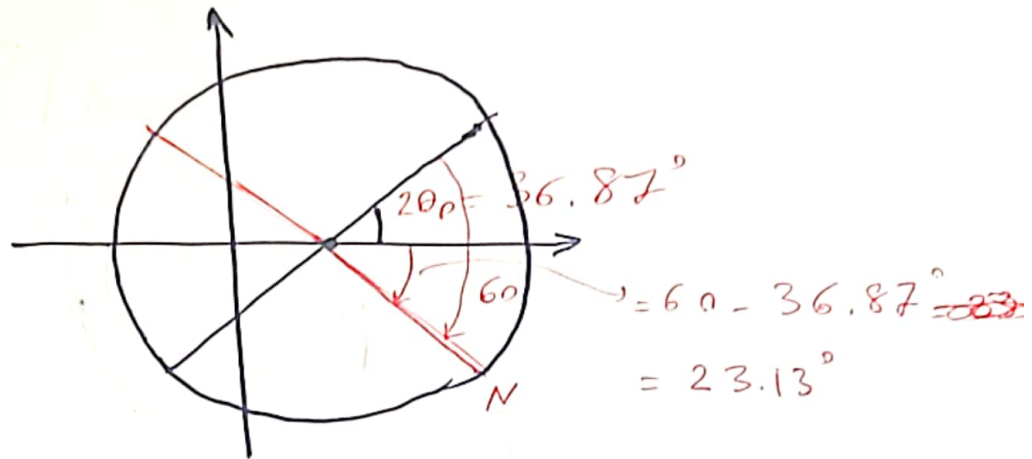
$$\frac{1}{2} \gamma_{max} = R = 100 \Rightarrow \gamma_{max} = 200 \mu$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta_p = 18.4^\circ \downarrow$$

$$2\theta_p + 2\theta_s = 90 \Rightarrow \theta_s = 26.6^\circ \uparrow$$

(7)

تسک (ب) یعنی در دایره مور 60 درجه در جهت عقربه‌های ساعت باسی حرکت کنیم.



$$\Sigma_n = \Sigma_{n'} = 40 + 100 \times \cos 23.13 = 132 \mu$$

$$\Sigma_{y'} = \Sigma_{ave} - R \cos 23.13 = 40 - 100 \cos 23.13 = -52 \mu$$

$$\frac{\gamma_{n'y'}}{2} = R \sin 23.13 = 39.28 \mu$$

تحلیل کرنش در حالت سه بعدی :

را بهای بین تنش و کرنش طبق قانون هooke

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

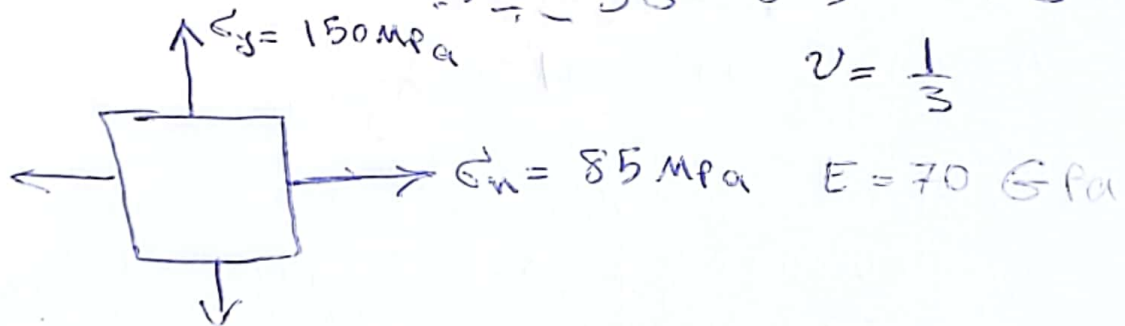
$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

کرنش حجمی $\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

مثال: برای حالت تنش سه‌بعدی نشان داده شده، مطلوب است کرنش های

اصلی و استدارهای اصلی را بیابید.



$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{70 \times 10^9} [85 \times 10^6 - \frac{1}{3} (150 \times 10^6 + 0)] = 0.5 \times 10^{-3} = 500 \mu$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

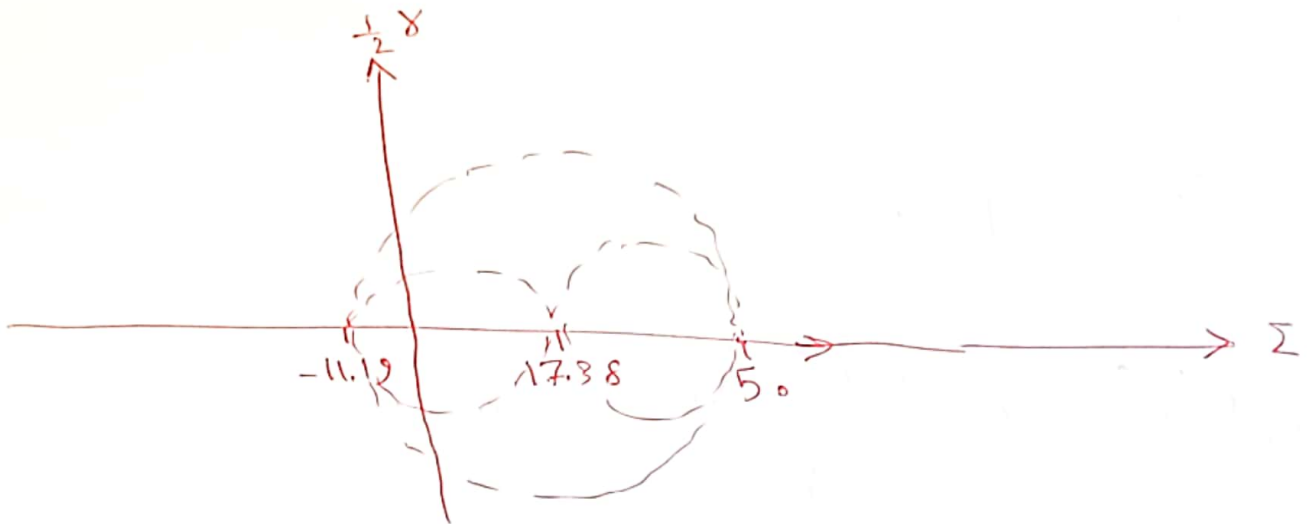
$$= \frac{1}{70 \times 10^9} [150 \times 10^6 - \frac{1}{3} (85 \times 10^6 + 0)] = 1.738 \times 10^{-3} = 1738 \mu$$

(8)

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\epsilon_z - (\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$= \frac{1}{70 \times 10^9} \left[10 - \frac{1}{3} (85 \times 10^6 + 150 \times 10^6) \right] = -1.119 \times 10^{-3} \\ = -11.19 \mu$$

ϵ_x و ϵ_z برابر باشی کرنش های اصلی هستن. یعنی



$$\text{شعاع دایره بزرگ} = \frac{50 - (-11.19)}{2} = \frac{61.19}{2} = \frac{\gamma_{max}}{2} \Rightarrow \gamma_{max} = 61.1$$