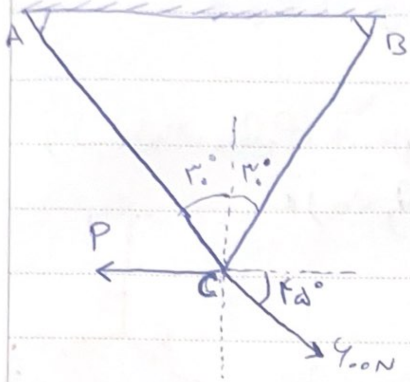
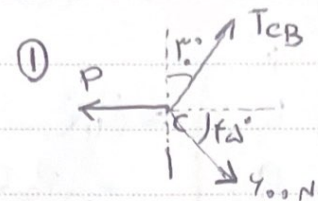
کانال مهمات شریف

@SHARIF_IE

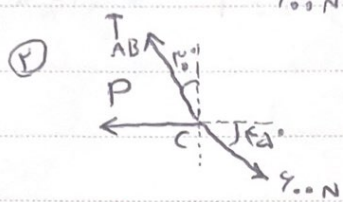
۱۴۰۲/۱۱/۲۹ — استاتیک، فصل اول و دوم

1. دامنه نیروی P را طوری تعیین کنید که دو کابل همواره در کشش باشند.





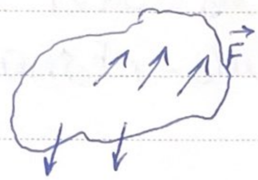
$P \le 669.3\,N$



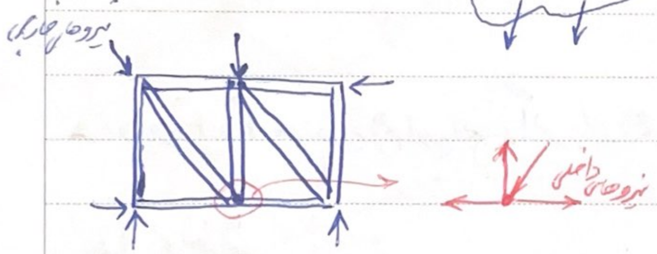
$P \ge 179\,N$

1 و 2 $\Rightarrow 179\,N \le P \le 669.3\,N$

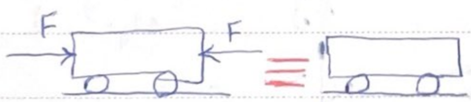
* اجسام صلب:



1. نیروهای داخلی
2. نیروهای خارجی



• نیروهای هم ارز[1]: نیروهایی هستند که اثر یکسان روی جسم می گذارند.

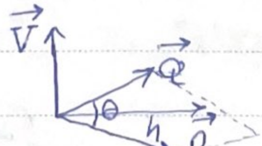


* ضرب برداری $\vec P$، $\vec Q$:

$$\vec V = \vec P \times \vec Q$$

1 { $V = PQ\sin\theta = hP = A$

$0 < \theta < \pi$: قانون دست راست



2 $\vec P \times \vec Q = -\vec Q \times \vec P$

1_ Equivalents

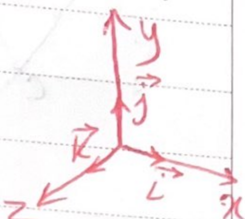
استاتیک فصل ۳

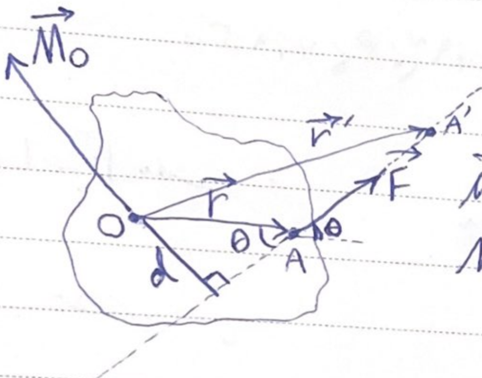
$\boxed{\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}}$; $\boxed{V = PQ\sin\theta}$

• مؤلفه‌های کارتزین در اصل ضرب برداری دو بردار:

$$\vec{V} = (P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}) \times (Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k})$$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\vec{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\vec{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\vec{k}$$





* لنگر یا ممان:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{OA'} \times \vec{F}$$

$$M_O = rF\sin\theta = Fr\sin\theta = Fd$$

▲ دو نیروی $\vec{F}$ و $\vec{F'}$ معادل (هم ارز) اند، اگر برابر (هم جهت و هم مقدار) بوده و دارای ممان یکسان حول یک نقطه باشند.

$$F = F', \quad M_O = M_O'$$

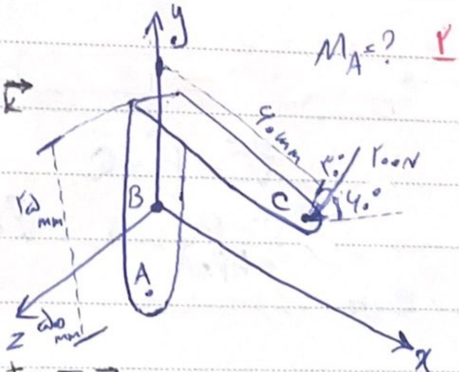
$M_A = ?$ ۲

$$\vec{M}_A = \vec{AC} \times \vec{F}$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}$$

$$= (60 - 0)\vec{i} + (25 - (-50))\vec{j} + (0 - 0)\vec{k}$$

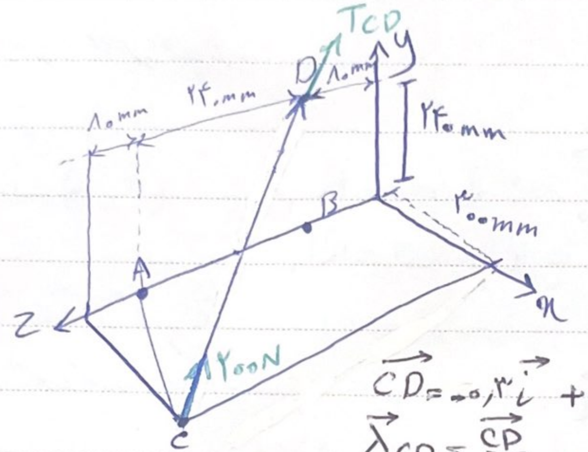
$$\vec{F} = -200\cos30^\circ\,\vec{j} + 200\cos60^\circ\,\vec{k}$$



$$M_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.06 & 0.075 & 0 \\ 0 & -100\sqrt{3} & 100 \end{vmatrix} = 7.5\vec{i} - 6\vec{j} + 6\sqrt{3}\vec{k}$$

۱۴۰۲/۱۱/۲۹ — استاتیک فصل ۳

۳. $T_{CD} = 200\,N$, $M_A = ?$



$$\vec{M}_A = \vec{AC} \times \vec{T}_{CD} = \vec{AD} \times \vec{T}_{CD}$$

$$\vec{r}_{C,A} = \vec{AC} = 0{,}3\,\vec{i} + 0{,}08\,\vec{k}$$

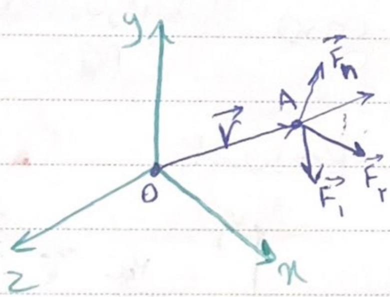
$$\vec{CD} = -0{,}3\,\vec{i} + 0{,}24\,\vec{j} - 0{,}32\,\vec{k} \Rightarrow CD = 0{,}5$$

$$\vec{\lambda}_{CD} = \frac{\vec{CP}}{CP} \ , \ \vec{T}_{CD} = T_{CD}\,\vec{\lambda}_{CD}$$

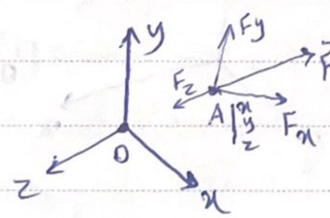
$$\Rightarrow \vec{T}_{CD} = 200\,\frac{-0{,}3\vec{i} + 0{,}24\vec{j} - 0{,}32\vec{k}}{0{,}5}$$

$$\Rightarrow M_A = \vec{AC} \times \vec{T}_{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

* قضیهٔ واریون[1] :

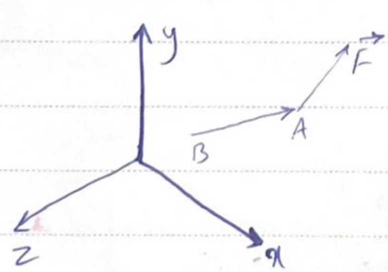


$$\vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$



$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

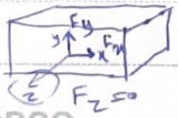
$$\begin{cases} M_x = zF_y - yF_z \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$



$$\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{r}_{A,B} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A,B} = x_{A,B}\,\vec{i} + y_{A,B}\,\vec{j} + z_{A,B}\,\vec{k}$$

$$x_{A,B} = x_A - x_B \quad y_{A,B} = y_A - y_B \quad z_{A,B} = z_A - z_B$$

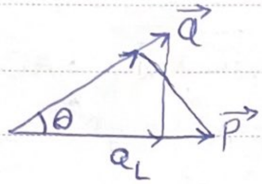


$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A,B} & y_{A,B} & z_{A,B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

1_Varignon Theorm

• ضرب عددی دو بردار:

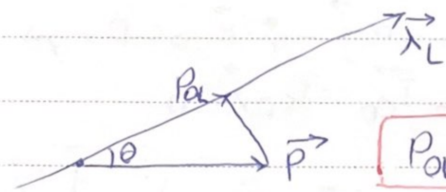
$$\boxed{\vec{P}\cdot\vec{Q}=\vec{Q}\cdot\vec{P}=PQ\cos\theta}$$



$$\begin{cases}\vec{P}\cdot\vec{Q}=PQ\cos\theta=PQ_L\\ \vec{P}\cdot\vec{Q}=QP\cos\theta=QP_L\end{cases}$$

$(\vec{P}\cdot\vec{Q}\cdot\vec{S}\times)$

• تصویر یک بردار روی یک محور:



$$\boxed{P_{OL}=P\cos\theta}$$

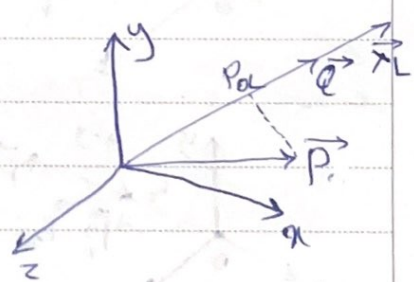
• تعیین زاویه دو امتداد:

$$\vec{P}\cdot\vec{Q}=PQ\cos\theta=(P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k})\cdot(Q_x\vec{i}+Q_y\vec{j}+Q_z\vec{k})$$

$$\Rightarrow P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z=PQ\cos\theta\Rightarrow\boxed{\cos\theta=\frac{P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z}{PQ}}$$

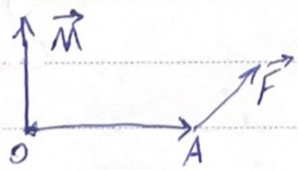
▲ $P_{OL}=P\cos\theta$, $\vec{P}\cdot\vec{Q}=PQ\cos\theta \xrightarrow{\div Q} \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{Q}=P\cos\theta=P_{OL}$

$$\Rightarrow P\cdot\frac{\vec{Q}}{Q}=P_{OL}\Rightarrow\boxed{\vec{P}\cdot\vec{\lambda}_L=P_{OL}}$$

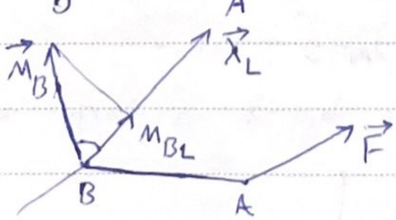


$$\begin{cases}\lambda_L=\cos\theta_x\vec{i}+\cos\theta_y\vec{j}+\cos\theta_z\vec{k}\\ P=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}\\ P_{OL}=P_x\cos\theta_x+P_y\cos\theta_y+P_z\cos\theta_z\end{cases}$$

• تعیین گشتاور یک نیرو حول یک محور:



$$\boxed{\vec{M}_O=\vec{OA}\times\vec{F}}$$



▲

$$\begin{cases}\vec{M}_B=\vec{BA}\times\vec{F}\\ \vec{M}_{BL}=\vec{\lambda}_L\cdot\vec{M}_B=\vec{M}_B\cdot\vec{\lambda}_L\\ M_{BL}=\vec{\lambda}_L\cdot(\vec{BA}\times\vec{F})\end{cases}$$

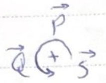
استاتیک، فصل ۳

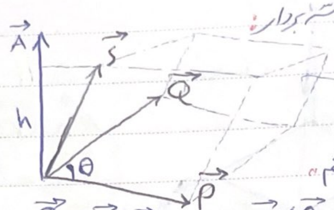
* حاصلضرب مختلط سه بردار:

$\vec{S}\cdot(\vec{P}\times\vec{Q})$

$\vec{S}\cdot\vec{A} = Ah$

$A = PQ\sin\theta$





حجم $= Ah$

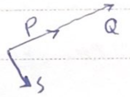
$$\vec{S}\cdot(\vec{P}\times\vec{Q}) = \vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{S}) = \vec{Q}\cdot(\vec{S}\times\vec{P}) = -\vec{S}\cdot(\vec{Q}\times\vec{P}) = -\vec{P}\cdot(\vec{S}\times\vec{Q})$$

$$\vec{S}\cdot(\vec{P}\times\vec{Q}) = \vec{S}\cdot\vec{k} = S_x k_x + S_y k_y + S_z k_z$$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \vec{k} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\vec{i} + (P_zQ_x - Q_zP_x)\vec{j} + (P_xQ_y - Q_xP_y)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{S}\cdot(\vec{P}\times\vec{Q}) = S_x(\quad) + S_y(\quad) + S_z(\quad) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

۱) سه بردار در داخل یک صفحه باشند.



۲) دو بردار در یک امتداد قرار داشته باشند.

$\Big\}\ \vec{S}\cdot(\vec{P}\times\vec{Q}) = 0$

▲ معنای فیزیکی گشتاور یک نیرو حول یک محور:

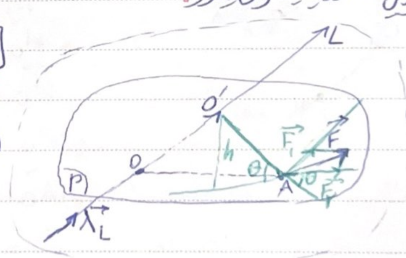
$M_{OL} = \lambda_L\cdot(\vec{OA}\times\vec{F}) \Rightarrow$

$M_{OL} = \lambda_L\cdot[(\vec{OO'} + \vec{O'A})\times(\vec{F_1} + \vec{F_2})]$

$= \cancel{\vec{\lambda_L}\cdot(\vec{OO'}\times\vec{F_1})} + \cancel{\vec{\lambda_L}\cdot(\vec{OO'}\times\vec{F_2})}$

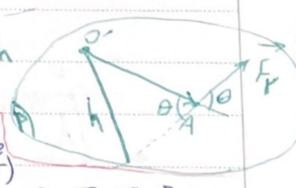
$+ \cancel{\lambda_L\cdot(\vec{O'A}\times\vec{F_1})} + \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{O'A}\times\vec{F_2})$

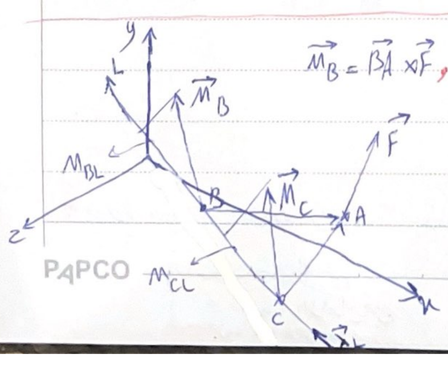
$\Rightarrow M_{OL} = \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{O'A}\times\vec{F_2})$



$M_{OL} = \vec{\lambda_L}\cdot(\alpha\vec{\lambda_L})$

$\Rightarrow M_{OL} = \alpha\,\vec{\lambda_L}\cdot\vec{\lambda_L} = \alpha$ ، $(O'A)(F_2)\sin\theta = F_2 h$





$\vec{M}_B = \vec{BA}\times\vec{F}$ ، $M_{BL} = \vec{\lambda_L}\cdot\vec{M}_B = \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{BA}\times\vec{F})$

$\vec{M}_C = \vec{CA}\times\vec{F}$ $\quad M_{CL} = \vec{\lambda_L}\cdot\vec{M}_C = \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{CA}\times\vec{F})$

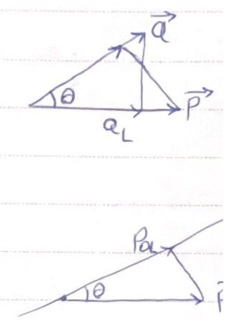
$M_{CL} = \vec{\lambda_L}\cdot[(\vec{CB} + \vec{BA})\times\vec{F}]$

$= \cancel{\vec{\lambda_L}\cdot(\vec{CB}\times\vec{F})} + \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{BA}\times\vec{F})$

$= \vec{\lambda_L}\cdot(\vec{BA}\times\vec{F})$

$\Rightarrow \boxed{M_{CL} = M_{BL}}$

$\boxed{\vec{P}\cdot\vec{Q} = \vec{Q}\cdot\vec{P} = PQ\cos}$



$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta =$

$\Rightarrow P_xQ_x + P_yQ_y +$

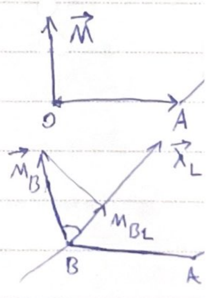
$P_{OL} = P\cos\theta$ ، $\vec{P}\cdot$

$\vec{P}\cdot\dfrac{\vec{Q}}{Q} = P_{OL} \Rightarrow \boxed{\vec{P}\cdot\vec{\lambda}}$

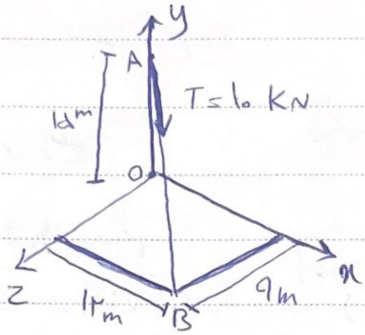
$\lambda_L = \cos\theta_x\vec{i} + \cos$

$P = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z$

$P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos$



مثال: گشتاور T را حول محور z بدست آورید.

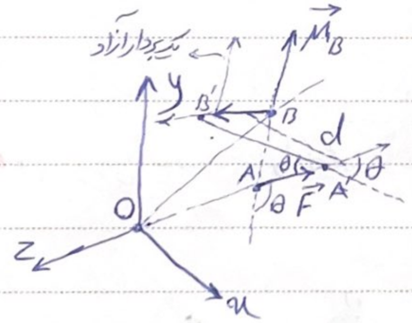


$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{OA}\times\vec{F}$$
$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{12\vec{i}-15\vec{j}+9\vec{k}}{21.2}$$
$$\vec{T}_{AB} = T_{AB}\vec{\lambda}_{AB} \Rightarrow$$

$$T_{AB} = 10(0.566\vec{i} - 0.7\vec{j} + 0.42\vec{k})$$
$$\Rightarrow \vec{M}_O = \vec{OA}\times\vec{T}_{AB} = 15\vec{j}\times(\quad) \Rightarrow \vec{M}_O = 150(-0.566\vec{k} + 0.424\vec{i})\ kN.m$$
$$\Rightarrow M_z = \vec{k}\cdot\vec{M}_O = -150(0.566) = -84.9\ kN.m$$

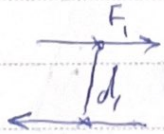
۱۴۰۲/۱۲/۸ :

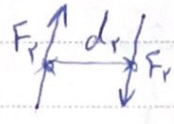
• کوپل (زوج نیرو): (نماد: ↻)



$$\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i = 0 \quad , \quad \Sigma M_O = ?$$
$$* \ \vec{M}_O = \vec{OA}\times\vec{F} + \vec{OB}\times(-\vec{F})$$
$$\Rightarrow \vec{M}_O = (\vec{OA}-\vec{OB})\times\vec{F} = \vec{BA}\times\vec{F}$$
$$\Rightarrow M_O = (BA)(F)\sin\theta = (BA\sin\theta)F = Fd$$
$$* \ \vec{M}_O = \vec{B'A'}\times\vec{F} = \vec{F}d$$

*۱ دو کوپل مساوی هستند اگر: $F_1 d_1 = F_2 d_2$.

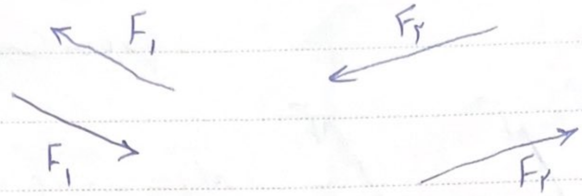


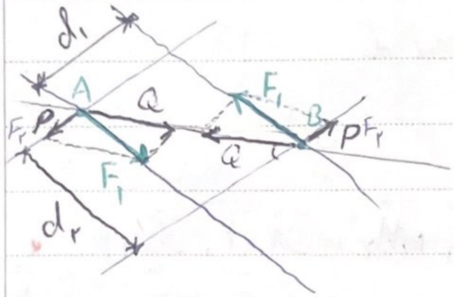


*۲ دو کوپل معادل خواهند بود اگر بتوان با استفاده از قوانین تجربی، از یک کوپل به کوپل دیگر رسید.

۱- قانون جمع متوازی‌الاضلاع
۲- لغزنده بودن بردار (تعادل خارجی)
۳- تجزیه یک نیرو حول دو محور

شکل‌ها صفحه بعد

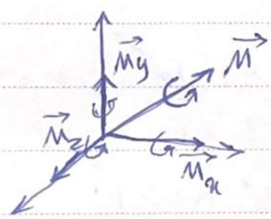




$\sum \vec{M}_A = 0$, $F_1 d_1 = F_2 d_2$

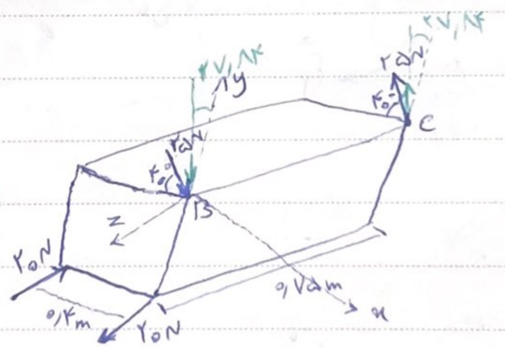
قانون وارینون: $\vec{r}\times\sum\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \dots$

$P d_2 = F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow \boxed{P = F_2}$



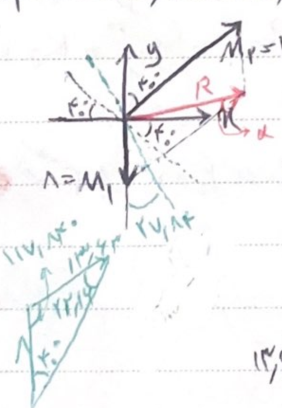
$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$

مثال:



$M_1 = ۲۰ \times ۰٫۴ = ۸$ N.m

$M_2 = ۲۵ \times ۰٫۷۵ = ۱۸٫۷۵$ N.m



$R^2 = ۸^2 + ۱۸٫۷۵^2 + ۲\times۸\times۱۸٫۷۵\times\cos۶۰° \Rightarrow R = ۱۳٫۶۳$ N

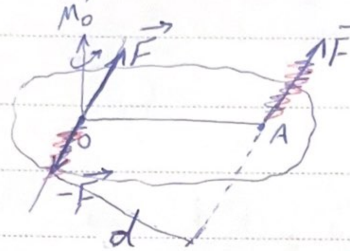
$\frac{۱۳٫۶۳}{\sin۶۰°} = \frac{۸}{\sin\alpha} \Rightarrow \alpha = ۲۲٫۱۴°$

$۱۳٫۶۳ = M = F\underbrace{d}_{۰٫۷۵} \Rightarrow F = \frac{۱۳٫۶۳}{۰٫۷۵} = ۱۸٫۱۷$ N

استاتیک فصل ۳

۱۴۰۲/۱۲/۸

• تجزیه یک نیروی داده شده به یک نیرو و کوپل :

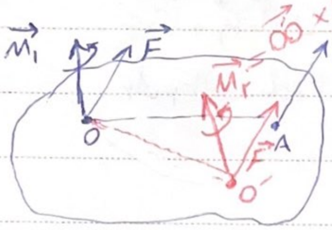


$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}_O| = Fd$$

۱۴۰۲/۱۲/۱۳

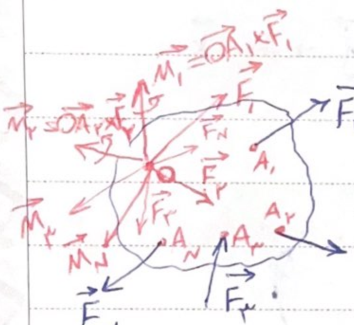
$\vec{OA} \times \vec{F} = \vec{M}_1$

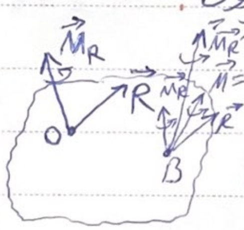


$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{OA} + \vec{O'O}) \times \vec{F} = \vec{O'A} \times \vec{F}$$

• تقلیل یک سیستم نیرو به یک نیرو و یک کوپل :

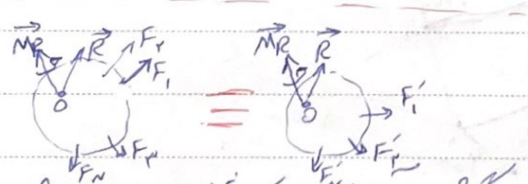




$$\begin{cases} \vec{R} = \Sigma \vec{F}_i \\ \vec{M}_R = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{cases}$$

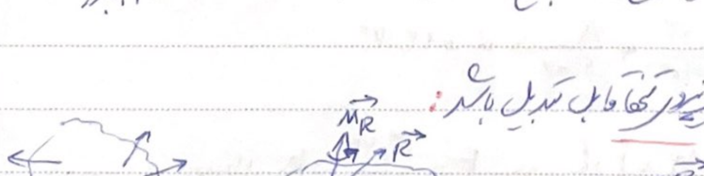
$$\vec{M}_R' = \vec{M}_R + \vec{BO} \times \vec{R}$$

$$\begin{cases} \vec{M}^R = M^R_x \vec{i} + M^R_y \vec{j} + M^R_z \vec{k} \\ \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \end{cases}$$



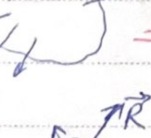
دو سیستم نیروی F_i و F'_i معادلند اگر مجموع نیرو و مجموع گشتاور آنها نسبت به یک نقطه O با هم برابر باشند.

• شرایطی که در آن یک سیستم نیروی به یک نیروی تنها قابل تبدیل باشد :



۱ نیروها همرس باشند.

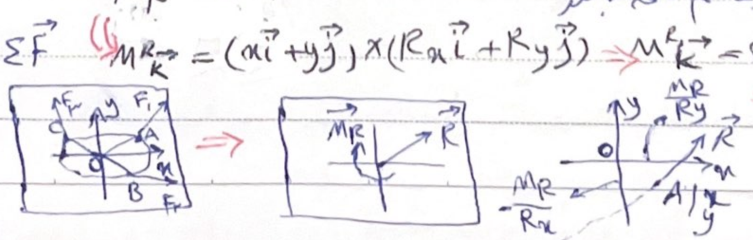
۲ نیروها هم صفحه[1] باشند



$$\vec{M}_R = \vec{OA} \times \vec{R}$$

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}$$

$$M^R_{\vec{k}} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \times (R_x \vec{i} + R_y \vec{j}) \Rightarrow M^R \vec{k} = xR_y \vec{k} - yR_x \vec{k}$$



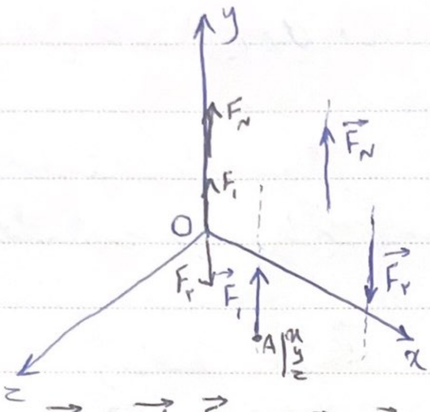
$$\Rightarrow \boxed{xR_y - yR_x = M_R}$$

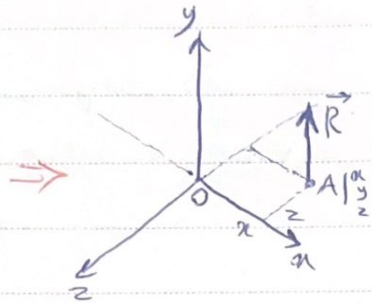
1- Co planar

۱۴۰۲/۱۲/۱۳ — استاتیک ، فصل ۳

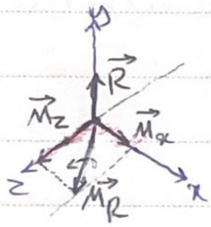
۳ * نیروهای موازی :

۱ برهم عمودند





$$\vec{M}_1 = \vec{OA} \times \vec{F}_1 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (F_1 \vec{j}) = xF_1 \vec{k} - zF_1 \vec{i}$$



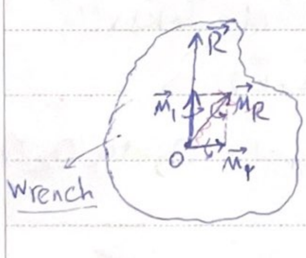
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ , \quad \vec{M}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_x \vec{i} + M_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_R = \vec{OA} \times \vec{R} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times R\vec{j} = M_x\vec{i} + M_z\vec{k}$$

$$= xR\vec{k} - zR\vec{i} = M_x\vec{i} + M_z\vec{k}$$

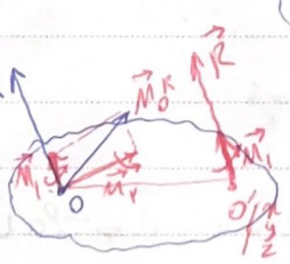
$$\begin{cases} \vec{k} \rightarrow M_z = xR \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{M_z}{R}} \\ \vec{i} \rightarrow M_x = -zR \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{-M_x}{R}} \end{cases}$$

۲ برهم عمود نیستند



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ , \quad \vec{M}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\begin{cases} \vec{M}_2 = \vec{OO'} \times \vec{R} \\ \vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}_1 + \overbrace{\vec{OO'}}^{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})} \times \vec{R} \end{cases}$$



۱۴۰۲/۱۲/۱۵

Pitch of wrench

$$\begin{cases} p = \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{\vec{M}_R \cdot \vec{\lambda}_R}{R} = \vec{\lambda}_R \cdot \dfrac{\vec{M}_R}{R} = \dfrac{\vec{R}}{R} \cdot \dfrac{\vec{M}_R}{R} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_R}{R^2} \\ \vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = pR + \vec{M}_2 = p\vec{R} + \vec{r} \times \vec{R} \\ \vec{M}_2 = \vec{OO'} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{R} \end{cases}$$

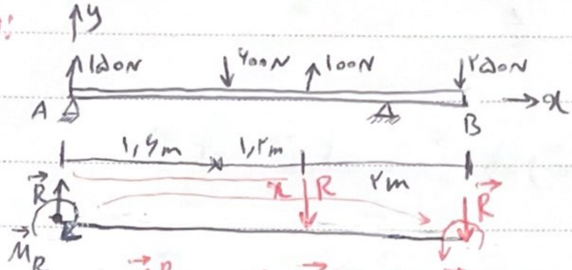
$$= p\vec{R} + (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times \vec{R}$$

* انواع حرکت با سیستم نیروی یکسان:

① Equivalent ⟶ هر دو جسم صلب باشند

② Equipollent ⟶ " " " نباشند ⟹ در هر دو سیستم نیروی یکسان، ولی حرکت های متفاوتی را تجربه می کنند.

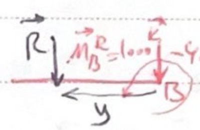
مثال ۱:



$$\vec{R}=\sum \vec{F}_i=-600\vec{j}$$

$$\vec{M}_R=\sum \vec{r}\times\vec{F}=1.6\vec{i}\times(-600\vec{j})+2.8\vec{i}\times(100\vec{j})+4.8\vec{i}\times(-250\vec{j})=-1880\vec{k}=\vec{M}_o$$

$$\vec{M}_B^R=-4.8\vec{i}\times(-600\vec{j})=2880\vec{k}-1880\vec{k}=1000\vec{k}$$

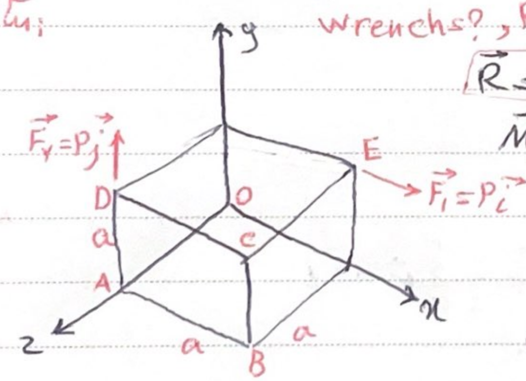


$$x\vec{i}\times\vec{R}=-1880\vec{k}\Rightarrow(-600x)\vec{k}=-1880\vec{k}\Rightarrow x=3.13\,m$$

$$(-y\vec{j})\times(-600\vec{j})=1000\vec{k}\Rightarrow y=1.67\,m$$

مثال ۲:

wrenchs?, R=?



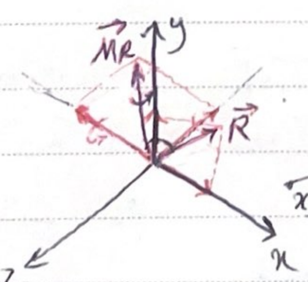
$$\boxed{\vec{R}=\sum\vec{F}_i=P(\vec{i}+\vec{j})}\Rightarrow|\vec{R}|=P\sqrt{2}$$

$$\vec{M}_O^R=\sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\vec{OE}\times\vec{F}_1+\vec{OD}\times\vec{F}_2$$

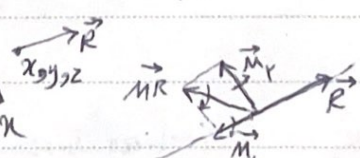
$$=a(\vec{i}+\vec{j})\times P\vec{i}+a(\vec{j}+\vec{k})\times P\vec{j}$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{M}_O^R=-Pa(\vec{i}+\vec{k})}$$

$$\cos\theta_x=P/P\sqrt{2}\Rightarrow\theta_x=45^\circ,\ \theta_y=45^\circ,\ \theta_z=90^\circ$$



$$p=\frac{\vec{M}^R\cdot\vec{R}}{R^2}=\frac{-Pa(\vec{i}+\vec{k})\cdot P(\vec{i}+\vec{j})}{(P\sqrt{2})^2}=\frac{-P^2a}{2P^2}=-\frac{a}{2}$$



$$\vec{M}_O^R=\vec{M}_1+\vec{M}_2=p\vec{R}+\vec{r}\times\vec{R}$$

$$\Rightarrow -Pa(\vec{i}+\vec{k})=-\frac{aP}{2}(\vec{i}+\vec{j})+(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\times P(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\Rightarrow -Pa(\vec{i}+\vec{k})=-\frac{a}{2}P(\vec{i}+\vec{j})+xP\vec{k}-Py\vec{k}+Pz\vec{j}-Pz\vec{i}$$

«ادامه حل جلسه بعد»

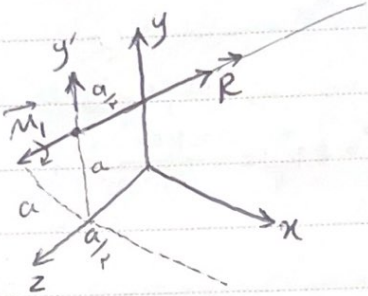
۱۴۰۲/۱۲/۱۵

ادامه حل مثال قبل:

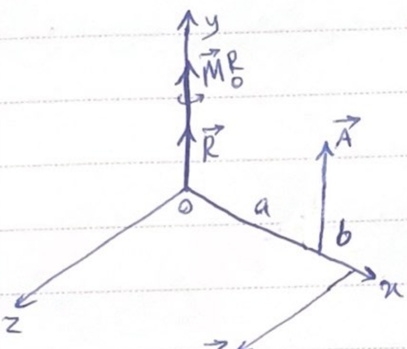
$(i): -Pa = -\frac{aP}{2} - Pz \Rightarrow Pz = \frac{aP}{2} \Rightarrow z = \frac{a}{2}$

$(j): 0 = -\frac{aP}{2} + Pz \Rightarrow z = \frac{a}{2}$

$(k): -Pa = xP - Py \Rightarrow x - y = -a \Rightarrow y = x + a$ یا $y' = x' + a$



مثال: گشتاور پیچشی را به دو نیروی عمود بر محورها جایگزین کنید.



$\vec{A} = A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$, $\vec{B} = B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$R\vec{j} = \vec{R} = (A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) + (B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$

$$\begin{cases} A_y + B_y = R & (1) \\ A_z + B_z = 0 & (2) \end{cases}$$

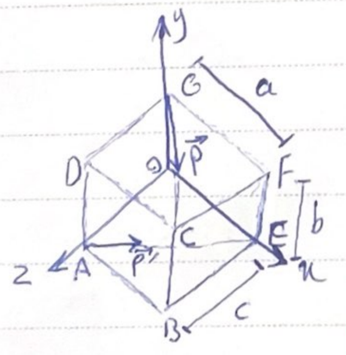
$\vec{M}_O^R = \sum \vec{r} \times \vec{F} = a\vec{i} \times (A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) + (a+b)\vec{i} \times (B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$

$\Rightarrow M_O^R = -A_z a - (a+b)B_z \quad (3)$, $aA_y + (a+b)B_y = 0 \quad (4)$

۱۴۰۲/۱۲/۲۰:

مثال: ۱. تقلیل این سیستم نیرو به یک کوپل نیرو برآیند

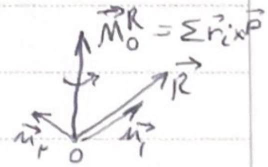
۲. تبدیل کوپل نیروی برآیند به یک wrench در نقطه O



$|\vec{P}| = |\vec{P}'|$

$$\begin{cases} \vec{\lambda}_{GC} = \frac{\vec{GC}}{GC} = \frac{a\vec{i} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \vec{\lambda}_{AE} = \frac{\vec{AE}}{AE} = \frac{a\vec{i} - c\vec{k}}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{cases}$$

$\vec{M}_O^R = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}$



$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{P(a\vec{i} + c\vec{k})}{\underbrace{\sqrt{a^2+c^2}}_{P}} + \frac{P(a\vec{i} - c\vec{k})}{\underbrace{\sqrt{a^2+c^2}}_{P'}} = \frac{2Pa\vec{i}}{\sqrt{a^2+c^2}} \Rightarrow \vec{M}_O^R = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i =$$

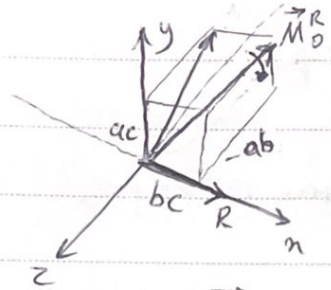
$\vec{OG} \times \vec{P} + \vec{OA} \times \vec{P}' = b\vec{j} \times \vec{P} + c\vec{k} \times \vec{P}'$

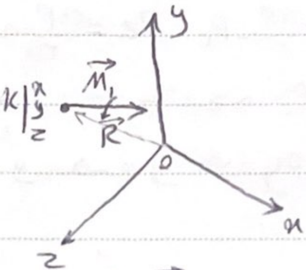
$\Rightarrow \vec{M}_O^R = \frac{P}{\sqrt{a^2+c^2}}(bc\vec{i} + ac\vec{j} - ab\vec{k})$

$\Rightarrow p = \frac{\vec{M}_O^R \cdot \vec{R}}{R^2} = \frac{bc}{2a}$ $\quad \vec{M}_1 = p\vec{R} = \frac{Pbc}{\sqrt{a^2+c^2}}\vec{i}$

ادامه حل صفحه بعد

ادامه حل مثال قبل:

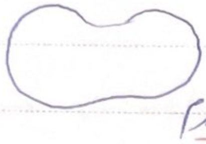




$$\vec{M}_O^R = \underbrace{\vec{M}_1}_{\lambda\vec{R}} + \underbrace{\vec{M}_2}_{\vec{r}\times\vec{R}} = \frac{Pbc}{\sqrt{a^2+c^2}}\,\vec{i} + \vec{OK}\times\vec{R}$$

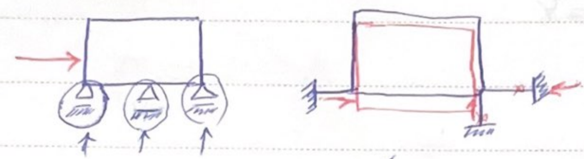
$\Leftarrow$ ($x=0$ و $y=\frac{b}{2}$ و $z=\frac{c}{2}$)

$$\hookrightarrow (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\times\left(\frac{2Pa\vec{i}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$



* اجسام دو بعدی (2-D): سه معادله تعادل باید برآورده شود.

• حداقل سه مولفه تکیه گاهی: { ① داشتن سه مولفه تکیه گاهی، شرط لازم برای پایداری اجسام / سازه های دو بعدی ② شرط کافی: این ۳ مولفه تکیه گاهی موازی یا همرس نباشند.

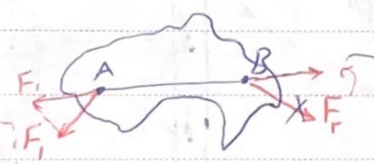


* اجسام سه بعدی (3-D): ۶ معادله تعادل ← ۶ مولفه تکیه گاهی ← شرط لازم

• شرط کافی: ۱- امتداد تمام مولفه های تکیه گاهی از یک محور عبور نکند. ۲- مولفه های تکیه گاهی در داخل صفحه های موازی قرار نگیرند

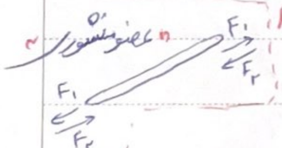
۳- همرس نباشند ۴- موازی نباشند

* اجسام دو نیرویی:



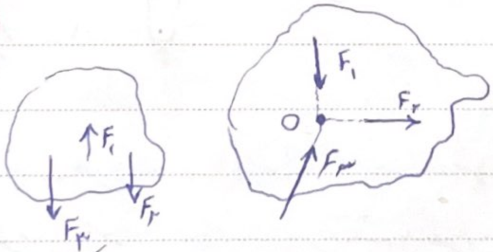
شرط لازم

حل معادلات ← شرط کافی

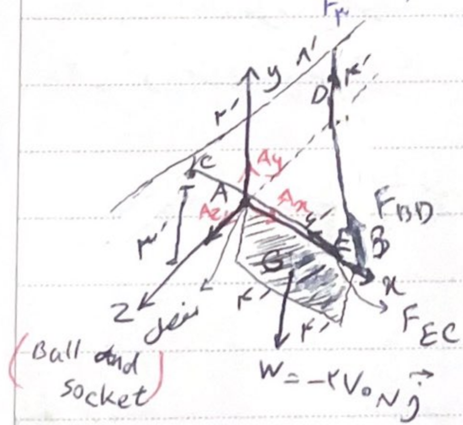


* اجسام سه نیرویی:

شرط لازم برای تعادل: همرس بودن نیروها



مثال: $F_{BD}=?$ ، $F_{EC}=?$ ، $A_x, A_y, A_z=?$



$$\begin{cases}\vec{BD}=-۸\vec{i}+۴\vec{j}-۸\vec{k} \Rightarrow BD=۱۲' \\ \vec{EC}=-۶\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k} \Rightarrow EC=۷' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\vec{\lambda}_{BD}=\frac{\vec{BD}}{BD}=-\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۱}{۳}\vec{j}-\frac{۲}{۳}\vec{k} \\ \vec{\lambda}_{EC}=\frac{\vec{EC}}{EC}=-\frac{۶}{۷}\vec{i}+\frac{۳}{۷}\vec{j}+\frac{۲}{۷}\vec{k}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{BD}=F_{BD}\vec{\lambda}_{BD} ، \vec{F}_{EC}=F_{EC}\vec{\lambda}_{EC}$$

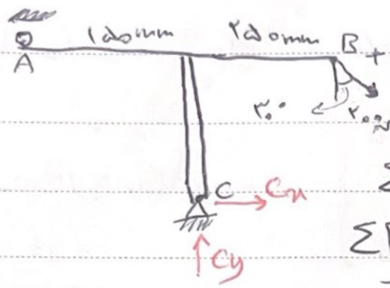
• $\sum\vec{F}=0 \Rightarrow A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}-۲۷۰\vec{j}+\vec{F}_{BD}+\vec{F}_{EC}=0$

• $\sum\vec{M}_A=\sum\vec{r}\times\vec{F}=0 \Rightarrow ۸\vec{i}\times F_{BD}\underbrace{(-\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۱}{۳}\vec{j}-\frac{۲}{۳}\vec{k})}_{\vec{\lambda}_{BD}}+۶\vec{i}\times F_{EC}\underbrace{(-\frac{۶}{۷}\vec{i}+\frac{۳}{۷}\vec{j}+\frac{۲}{۷}\vec{k})}_{\vec{\lambda}_{EC}}+۴\vec{i}\times(-۲۷۰\vec{j})=0$

$\Rightarrow F_{BD}=F_{EC}=۳/۵۰$ kips ؛ $A_x=۳۳۸\,lb$ ، $A_y=۱۰۱/۲\,lb$ ، $A_z=-۲۲/۵\,lb$

۱۴۰۳ / ۱ / ۱۹ — استاتیک فصل ۴

مثال:

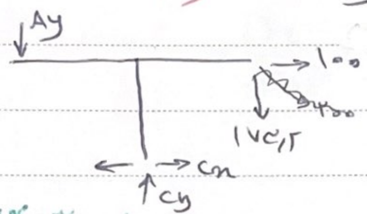


$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$

$A_y(150) - 173.2(250) - 100(300) = 0 \Rightarrow A_y = 489\,N \downarrow$

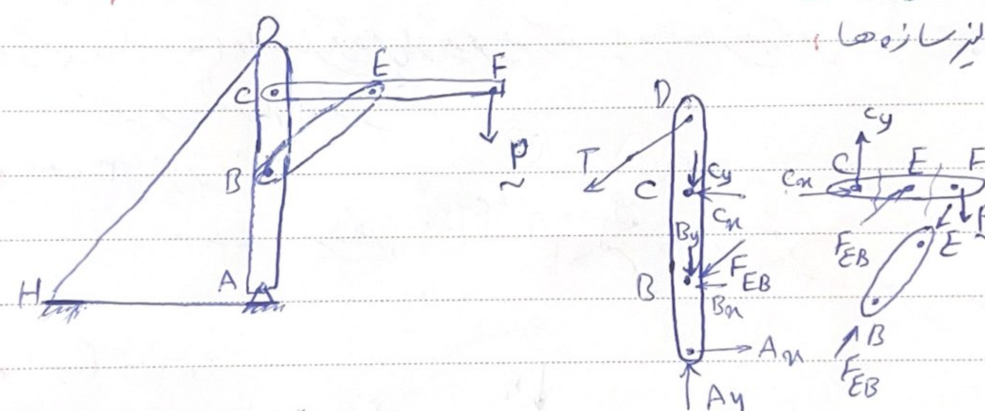
$\sum F_x = 0 \Rightarrow 100 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = -100\,N$

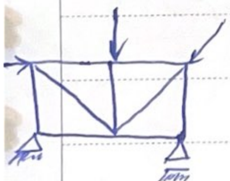
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y + C_y - 173.2 = 0 \Rightarrow C_y = 662.2\,N \uparrow$



۱۴۰۳ / ۱ / ۲۱ — استاتیک فصل ۶

* آنالیز سازه‌ها:

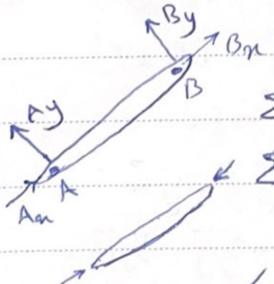




• انواع سازه‌ها: ۱ خرپاها[1]: فقط از اعضاء دونیرویی ← ۱ ساده ۲ مرکب ۳ بغرنج

۲ قاب‌ها[2]: حداقل یک عضو سه نیرویی یا بیشتر داشته باشند.

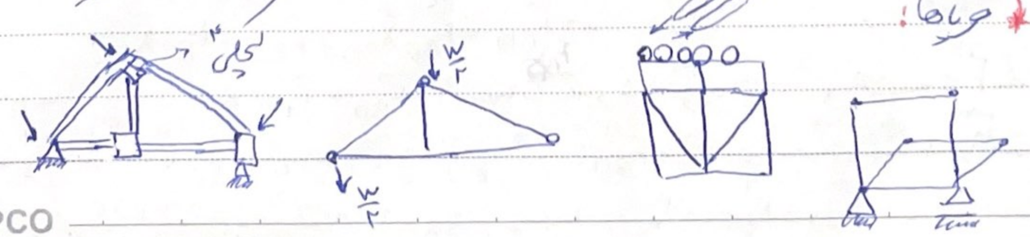
۳ ماشین‌ها[3]: قاب‌هایی که دارای قطعات متحرک باشند.



$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y = 0$ $\quad$ $\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 0$

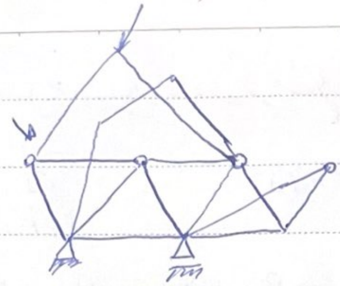
$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y = 0$ $\quad$ $\Rightarrow A_x = -B_x$

* خرپاها:



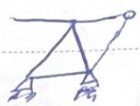
PAPCO

۱- Truss ۳- Machines
۲- Frames ۴- gusset plats

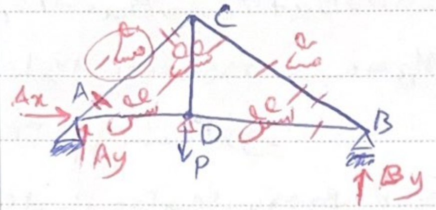


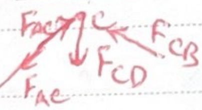
! خرپای ساده (دوبعدی) ← گره‌ها (مفصل‌ها) ← نودها ، عضوها

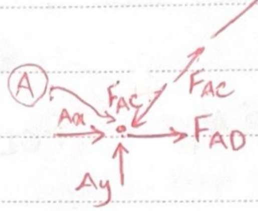
$m = 3 + 2(n-3) \Rightarrow \boxed{2n = m+3}$ برای خرپای دوبعدی ساده

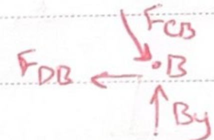


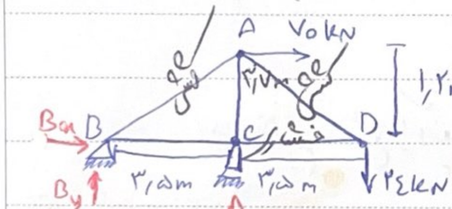
! تحلیل خرپای ساده به روش مفصل:









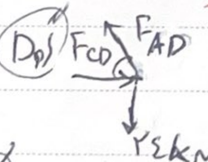


مثال: $\sum M_B = 0 \Rightarrow -70(1.2) + C_y(3.5) - 24(7) = 0$

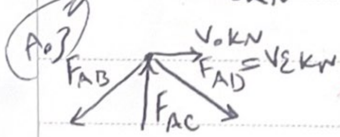
$\Rightarrow C_y = 72\,kN$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + 70 = 0 \Rightarrow B_x = -70\,kN$

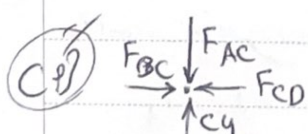
$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + C_y - 24 = 0 \Rightarrow B_y = -48\,kN$



$\frac{F_{AD}}{3.7} = \frac{F_{CD}}{3.5} = \frac{24}{1.2} \Rightarrow \begin{cases} F_{AD} = 74\,kN\,(T) \\ F_{CD} = 70\,kN\,(C) \end{cases}$

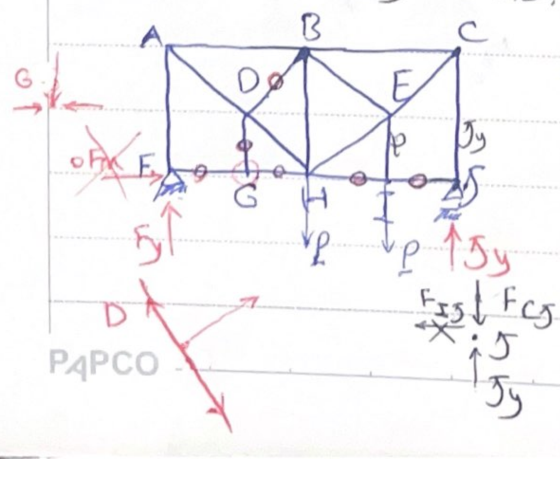


$\Rightarrow \begin{cases} F_{AB} = 148\,kN\,(T) \\ F_{AC} = 72\,kN\,(C) \end{cases}$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{CD} = 70\,kN$

مثال: اعضای صفر نیروی را بدست آورید. ، با توجه به حالات خاص صفحه بعد ،



$F_{GF} = F_{GH}$ ، $F_{DG} = 0$ ،

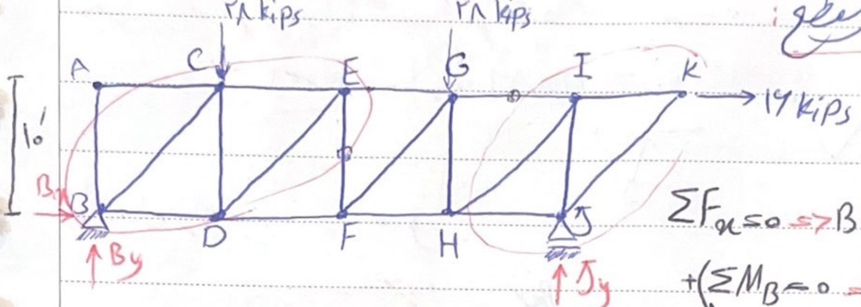
$F_{AD} = F_{DH}$ ، $F_{DB} = 0$ ،

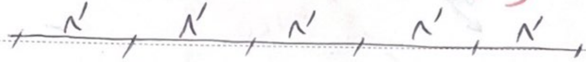
مفصل F ، $F_{FG} = 0$ ،

$F_{AF} = F_y$ ، $F_{GH} = 0$ ،

۱۴۰۳/۱/۲۶ «استاتیک، فصل ۶»

۲* تحلیل خرپای ساده به روش مقطع:





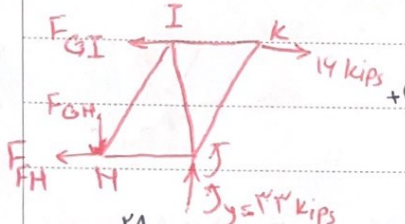
$F_{GI}=?$

$F_{EF}=?$

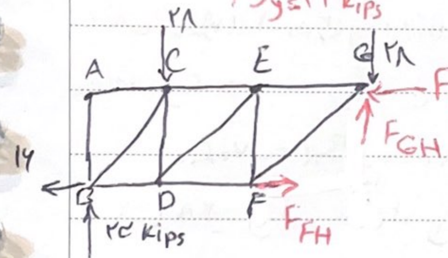
$\sum F_x=0 \Rightarrow B_x+16=0 \Rightarrow \boxed{B_x=-16\text{ kips}}$

$+\circlearrowleft \sum M_B=0 \Rightarrow -28(8+24)-16\times 10 + J_y\times 32=0 \Rightarrow \boxed{J_y=33\text{ kips}}$

$\sum F_y=0 \Rightarrow B_y+J_y-28\times 2=0 \Rightarrow \boxed{B_y=23\text{ kips}}$

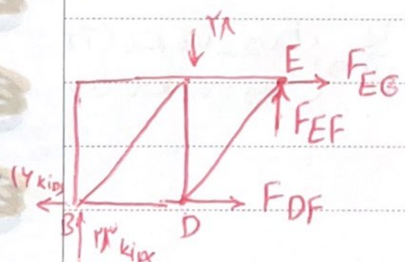


$+\circlearrowleft \sum M_H=0 \Rightarrow F_{GI}(-10)-16(10)+33\times 8=0 \Rightarrow \boxed{F_{GI}=10.4\text{ kips}}$



یا می‌توانستیم مقطع را اینگونه در نظر بگیریم

$\Rightarrow F_{GI}=-10.4\text{ kips}$

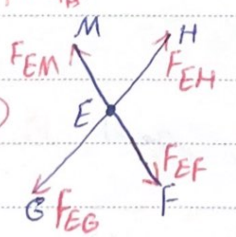


$\sum F_y=0 \Rightarrow -F_{EF}-28+23=0$

$\Rightarrow \boxed{F_{EF}=-5\text{ kips}}$

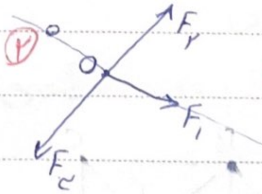
۳* حالت خاص در روش بررسی تعادل مفصل‌ها:

①



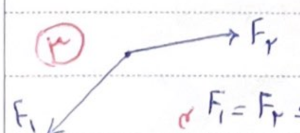
«$F_{EG}=F_{EH}$ ، $F_{EF}=F_{EM}$»

②



«$F_3=F_2$ ، $F_1=0$»

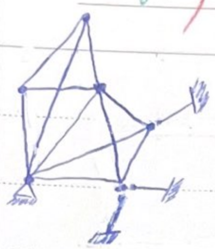
③



«$F_1=F_2=0$»

PAPCO

۱. خرپای ساده (سه بعدی):



خرپای سه بعدی ساده معین

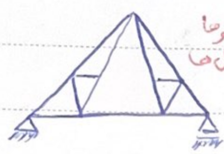
$m = 6 + 3(n-4) \Rightarrow \boxed{m + 6 = 3n}$

تعداد عضوها — تعداد نود (گره) ها

۲. خرپای مرکب:

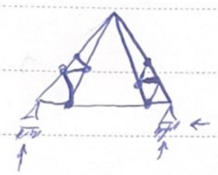
$m + r = 2n$

تعداد عضوها — تعداد عکس العمل ها — تعداد گره ها



۱۴۰۳/۱/۲۸

مثال:



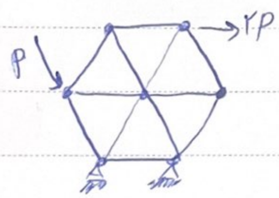
$2n \rightarrow 11 \times 2 = 22$

$m = 18$ ، $r = 4$ $\Rightarrow$ $m + r = 2n$ → شرط لازم

ناپایدار / ناقص ← $m + r < 2n$ ، $m + r > 2n$ → نامعین

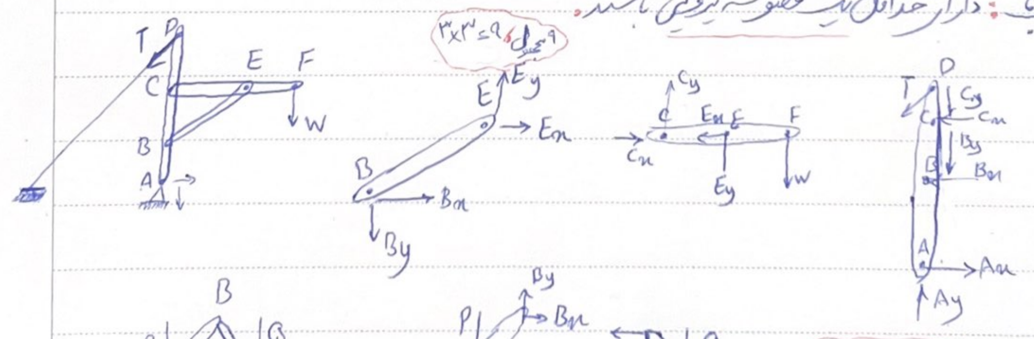
(معادلات را نمی‌شود حل کرد)

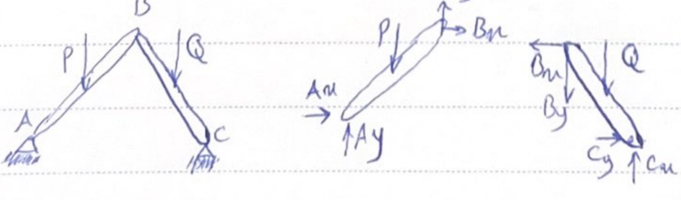
۳. خرپای بغرنج:



* قاب‌ها: دارای حداقل یک عضو سه نیرویی باشند.

۹ مجهول، $3 \times 3 = 9$

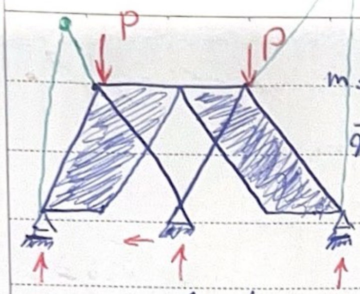




۶ مجهول، $2 \times 3 = 6$

۱۴۰۳ / ۲ / ۲ — استاتیک، فصل ۶

* مراکز ثقل[1] و سطح و حجم[2]:



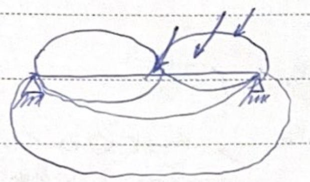
$m=12,\ r=4,\ n=8 \Rightarrow 8\times 2 = 12+4$ ✓

$\bar{x}A = \int_A x\,dA = 0 \Rightarrow \bar{x}=0$

$A=\int_A dA,\quad Q_y=\int_A x\,dA,\quad Q_x=\int_A y\,dA$

$\Delta W = \gamma t \Delta A \Rightarrow dW = \gamma t\,dA$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x_{el}\,dW}{\int dW} = \frac{\int x_{el}\,\gamma t\,dA}{\int \gamma t\,dA} = \boxed{\frac{\int_A x_{el}\,dA}{\int_A dA} = \bar{x}}$$



$\Delta W = a\gamma\,dL\ ;\quad \bar{x} = \frac{\int_L x_{el}\,dL}{\int_L dL}$

۱۴۰۳ / ۲ / ۴ — ادامه جلسه قبل

$\begin{cases}\bar{x}W = \int x_{el}\,dW\\ \bar{y}W = \int y_{el}\,dW\end{cases}$ سطوح و سیم ها (رشته ها) ؛ $\begin{cases}Q_x = \bar{y}A\\ Q_y = \bar{x}A\end{cases}$

• سطوح، جسم همگن و ضخامت یکسان باشد:

$W=\gamma t A$

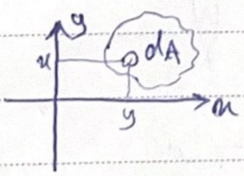
$dW = \gamma t\,dA \Rightarrow \begin{cases}\bar{x}A = \int_A x\,dA\\ \bar{y}A = \int_A y\,dA\end{cases}$

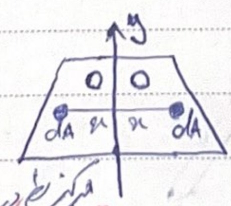
* $\bar{x}A = Q_y = \int_A x\,dA = 0 \Rightarrow \bar{x}=0$

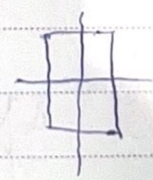
• رشته ها (سیم ها):

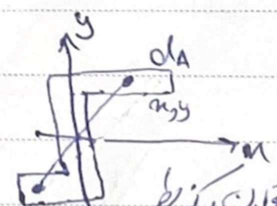
$W=\gamma A L$

$dW = \gamma A\,dL \Rightarrow \begin{cases}\bar{x}L = \int x\,dL\\ \bar{y}L = \int y\,dL\end{cases}$



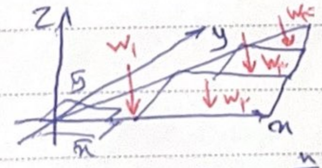


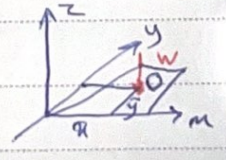




مرکز سطح در محل تلاقی دو محور تقارن خواهد بود

مرکز تقارن، مرکز سطح خواهد بود. $Q_x = Q_y = 0 \Rightarrow \bar{x}=\bar{y}=0$





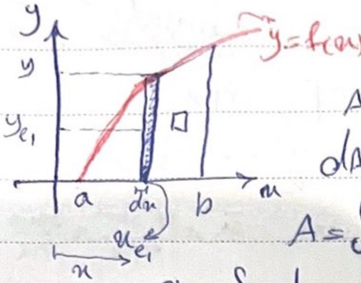
* مدول (اشکال متعارف):

$W = \sum_{i=1}^{n} W_i\ ;\quad \begin{cases}\sum M_y = \bar{x}W = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i W_i\\ \sum M_x = \bar{y}W = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i W_i\end{cases}$

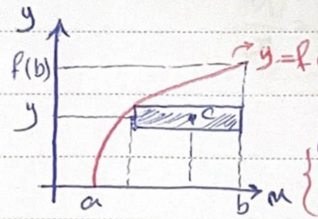
$A = \sum_{i=1}^{n} A_i\ ;\quad \begin{cases}\bar{x}A = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i\\ \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i\end{cases}$

1- center of gravity
2- centroid

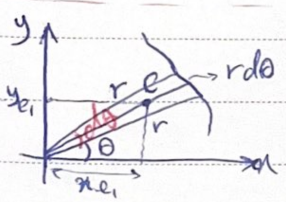
* تعیین مرکز سطح توسط انتگرال گیری:



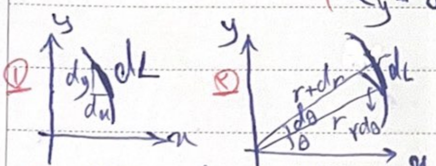
(۱)
$$A=\int dA=\iint dx\,dy=\int dx\int dy$$
$$dA=y\,dx \Rightarrow A=\int_a^b y\,dx \qquad (x_{e_1}=x,\ y_{e_1}=y)$$
$$A=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$
$$Q_y=\int_A x_{e_1}dA=\int_a^b xy\,dx=\int_a^b x f(x)\,dx,\quad Q_x=\int_A y_{e_1}dA=\int y/2\, y\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx$$



(۲)
$$dA=(b-x)dy,\quad x_{e_1}=\frac{x+b}{2},\quad y_{e_1}=\int_a^{f(b)}y$$
$$\begin{cases}Q_x=\int y_{e_1}dA=\int_a^{f(b)}y(b-x)dy\\ Q_y=\int x_{e_1}dA=\int\left(\frac{x+b}{2}\right)(b-x)dy\end{cases}\Rightarrow \boxed{\bar{x}=\frac{\int_A x_{e_1}dA}{\int_A dA}},\ \boxed{\bar{y}=\frac{\int_A y_{e_1}dA}{\int_A dA}}$$



(۳)
$$r=f(\theta),\quad x_{e_1}=\frac{2}{3}r\cos\theta,\quad y_{e_1}=\frac{2}{3}r\sin\theta$$
$$dA=\frac{1}{2}r\,r\,d\theta=\frac{1}{2}r^2d\theta,\quad A=\int dA=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$$
$$\begin{cases}Q_x=\int_A y_{e_1}dA=\int_\alpha^\beta\left(\frac{2}{3}r\sin\theta\right)\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\theta\\ Q_y=\int_A x_{e_1}dA=\int_\alpha^\beta\left(\frac{2}{3}r\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\theta\end{cases}$$

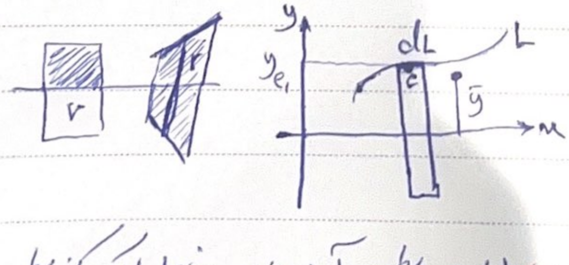


(۴)
(۱) $dL^2=dx^2+dy^2 \Rightarrow dL=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx$
$\Rightarrow dL=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$ یا $dL=\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dy$

(۲) $dr^2+(rd\theta)^2=dL^2 \Rightarrow dL=\sqrt{dr^2+(rd\theta)^2} \Rightarrow dL=\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\theta \Rightarrow dL=rd\theta$

* سطوح و احجام حاصل از دوران (قضایای گلدینس - پاپوس[1]):

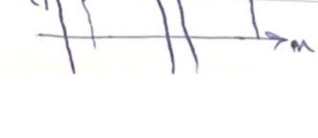
! قضیه اول: مساحت یک سطح حاصل از دوران، برابر است با طول منحنی بوجود آورنده سطح در مسافتی که مرکز سطح این منحنی، طی دوران پیموده است.



$$dA=2\pi y_e dL$$
$$A=\int_L 2\pi y_{e_1}dL=2\pi\int_L y_{e_1}dL=2\pi\bar{y}L \Rightarrow \boxed{A=2\pi\bar{y}L}$$

! قضیه دوم: حجم حاصل از دوران یک سطح حول یک محور ثابت، برابر است با سطح بوجود آورنده ضرب در فاصله ای که مرکز سطح این سطح، طی دوران می پیماید.

$$\int dV=\int dA(2\pi y_{e_1})$$
$$V=\int_A 2\pi y_{e_1}dA=2\pi\int y_{e_1}dA \Rightarrow \boxed{V=2\pi\bar{y}A}$$

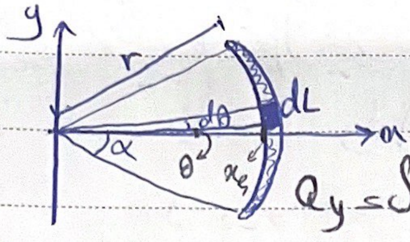


1- Guldinus-Papus theorems

۱۴۰۳ / ۲ / ۴

استاتیک، فصل ۶

مثال: مرکز ثقل این میله؟



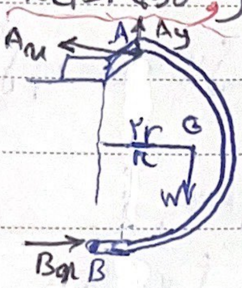
$$\bar{x}L = \int_L x\,dL \;,\; \bar{y} = 0$$

$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta = r\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2r\alpha$$

$$Q_y = \int x_{e_1}\,dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta\,(r)\,d\theta = r^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta = r^2\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$$

$x_{e_1} = r\cos\theta \;,\; y_{e_1} = r\sin\theta$ $\Rightarrow Q_y = 2r^2\sin\alpha \;;\; Q_y = \bar{x}L \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{r\alpha}$

مثال:



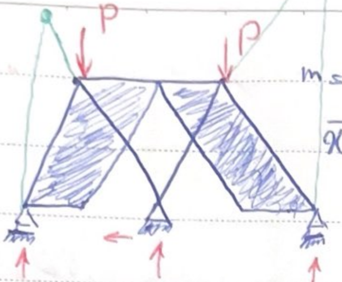
$$\sum M_A = 0 ;\quad W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = B_x(2r) \Rightarrow B_x = \frac{W}{\pi}$$

$$\sum F_y = 0 ;\quad A_y - W = 0 \Rightarrow A_y = W$$

$$\sum F_x = 0 ;\quad A_x = B_x = W/\pi$$

۱۴۰۳/۲/۲

استاتیک، فصل ۵



* مراکز ثقل[1] و مرکز سطح[2]:

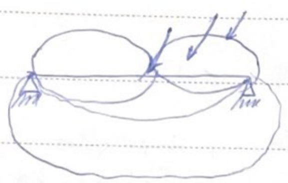
$m=12,\ r=4,\ n=8 \Rightarrow 8\times 2 = 12+4$ ✓

$$\bar{x}A = \int_A x\,dA = 0 \quad \bar{x}=0$$

$$A=\int_A dA,\quad Q_y=\int_A x\,dA,\quad Q_x=\int_A y\,dA$$

$$\Delta W = \gamma t \Delta A \Rightarrow dW = \gamma t\,dA$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x_{el}\,dW}{\int dW} = \frac{\int x_{el}\,\cancel{\gamma t}\,dA}{\int \cancel{\gamma t}\,dA} = \boxed{\frac{\int_A x_{el}\,dA}{\int_A dA} = \bar{x}}$$



$$\Delta W = a\gamma\,dL\ ;\quad \bar{x} = \frac{\int_L x_{el}\,dL}{\int_L dL}$$

۱۴۰۳/۲/۴

امروز جلسه قبل

$$\begin{cases}\bar{x}W = \int x_{el}\,dW \\ \bar{y}W = \int y_{el}\,dW\end{cases}$$ سطح و سیم‌ها (رشته‌ها)

$$\begin{cases}Q_x = \bar{y}A \\ Q_y = \bar{x}A\end{cases}$$

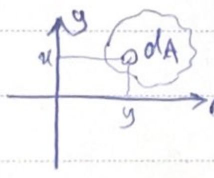
• سطح جسم همگن و ضخامت یکسان باشد:

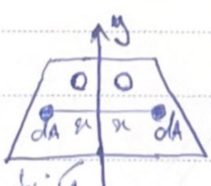
$$W=\gamma t A,\quad dW=\gamma t\,dA \Rightarrow \begin{cases}\bar{x}A=\int_A x\,dA \\ \bar{y}A=\int_A y\,dA\end{cases}$$

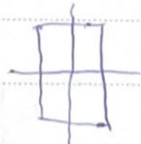
$$*\ \bar{x}A = Q_y = \int_A x\,dA = 0 \Rightarrow \bar{x}=0$$

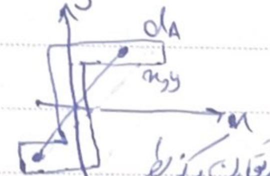
• رشته‌ها (سیم‌ها):

$$W=\gamma A L,\quad dW=\gamma A\,dL \Rightarrow \begin{cases}\bar{x}L=\int x\,dL \\ \bar{y}L=\int y\,dL\end{cases}$$



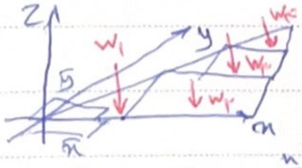


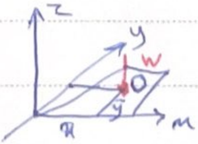




مرکز سطح در محل تلاقی دو محور تقارن خواهد بود

محور تقارن، مرکز سطح خواهد بود، $Q_x=Q_y=0 \Rightarrow \bar{x}=\bar{y}=0$





* مدول (اشکال متعارف):

$$W=\sum_{i=1}^{n} W_i\ ;\quad \begin{cases}\sum M_y = \bar{x}W = \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i W_i \\ \sum M_x = \bar{y}W = \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i W_i\end{cases}$$

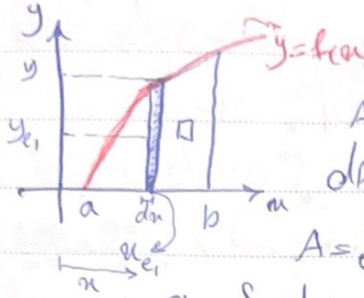
$$A=\sum_{i=1}^{n} A_i\ ;\quad \begin{cases}\bar{x}A = \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i A_i \\ \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i A_i\end{cases}$$

1. center of gravity
2. centroid

۱۴۰۳ / ۲ / ۴

استاتیک، فصل ۵

* تعیین مرکز سطح توسط انتگرال گیری:

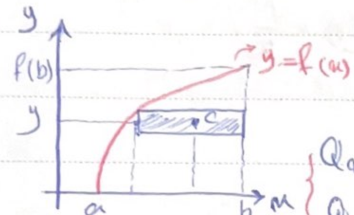


(۱) $A=\int dA=\iint dx\,dy=\int dx\int dy$

$dA=y\,dx \Rightarrow A=\int_a^b y\,dx$ ، $x_{e_1}=x,\ y_{e_1}=y$

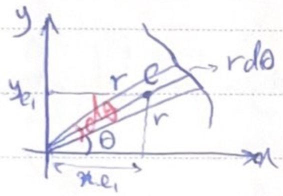
$A=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

$Q_y=\int_A x_{e_1}dA=\int_a^b xy\,dx=\int_a^b x f(x)\,dx$ ، $Q_x=\int_A y_{e_1}dA=\int y/_{2}\, y^2 dx=\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$



(۲) $dA=(b-x)dy$ ، $x_{e_1}=\frac{x+b}{2}$ ، $y_{e_1}=\int_a^{f(b)} y$

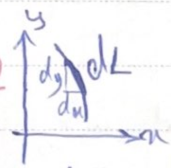
$\begin{cases} Q_x=\int y_{e_1}dA=\int_a^{f(b)} y(b-x)dy \\ Q_y=\int x_{e_1}dA=\left(\frac{x+b}{2}\right)(b-x)dy \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{x}=\frac{\int_A x_{e_1}dA}{\int_A dA}}$ $\boxed{\bar{y}=\frac{\int_A y_{e_1}dA}{\int_A dA}}$

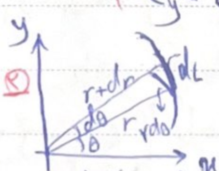


(۳) $r=f(\theta)$ ، $x_{e_1}=\frac{2}{3}r\cos\theta$ ، $y_{e_1}=\frac{2}{3}r\sin\theta$

$dA=\frac{1}{2}r\,r\,d\theta=\frac{1}{2}r^2d\theta$ ، $A=\int dA=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$

$\begin{cases} Q_x=\int_A y_{e_1}dA=\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}r\sin\theta\right)\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\theta \\ Q_y=\int_A x_{e_1}dA=\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}r\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}r^2\right)d\theta \end{cases}$

(۱) 

(۲) 

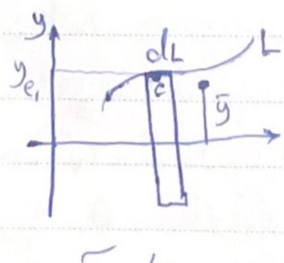
(۴) (۱) $dL^2=dx^2+dy^2 \Rightarrow dL=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx$

$\Rightarrow dL=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$ یا $dL=\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dy$

(۲) $dr^2+(r\,d\theta)^2=dL^2 \Rightarrow dL=\sqrt{dr^2+(r\,d\theta)^2} \Rightarrow dL=\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\theta \Rightarrow dL=r\,d\theta$

* سطوح و احجام حاصل از دوران (قضایای گلدینس - پاپس[1]):

۱) قضیهٔ اول: مساحت یک سطح حاصل از دوران، برابر است با طول منحنی بوجود آورندهٔ سطح، در مسافتی که مرکز سطح این منحنی، طی دوران پیموده است.



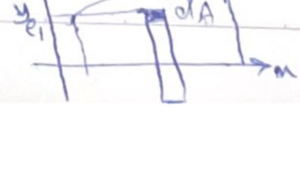
$dA=2\pi y_{e_1}dL$

$A=\int_L 2\pi y_{e_1}dL=2\pi\int_L y_{e_1}dL=2\pi\bar{y}L \Rightarrow \boxed{A=2\pi\bar{y}L}$

۲) قضیهٔ دوم: حجم حاصل از دوران یک سطح حول یک محور ثابت، برابر است با سطح بوجود آورنده ضرب در فاصله ای که مرکز سطح این سطح، طی دوران می پیماید.

$\int dV=\int dA(2\pi y_{e_1})$

$V=\int_A 2\pi y_{e_1}dA=2\pi\int y_{e_1}dA \Rightarrow \boxed{V=2\pi\bar{y}A}$

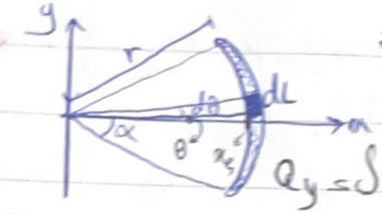


1- Guldinus-Papus theorms

۱۴۰۳ / ۲ / ۴

استاتیک - فصل ۵

مثال: مرکز ثقل را بیابید؟



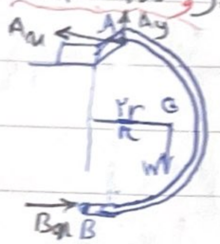
$\bar{x}L = \int_L x\,dL$, $\bar{y}=0$

$L=\int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta = r\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2r\alpha$

$Q_y = \int x_{e_1}\,dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta\,(r)\,d\theta = r^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta = r^2\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$x_{e_1}=r\cos\theta$, $y_{e_1}=r\sin\theta$ $\Rightarrow Q_y=2r^2\sin\alpha$; $Q_y=\bar{x}L \Rightarrow \bar{x}=\frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha}=\frac{\sin\alpha}{r\alpha}$

مثال



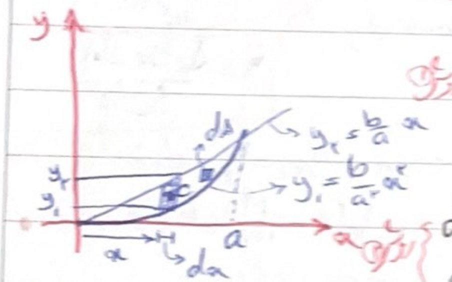
$\sum M_A=0$: $W(\frac{2r}{\pi}) = B_x(2r) \Rightarrow B_x=\frac{W}{\pi}$

$\sum F_y=0$: $A_y - W = 0 \Rightarrow A_y=W$

$\sum F_x=0$: $A_x = B_x = W/\pi$

۱۴۰۳ / ۲ / ۹

مثال:



روش ۱

$dA=(y_2-y_1)\,dx$, $x_{e_1}=x$

$y_{e_1}=\frac{y_1+y_2}{2}$

② روش ۲

$dA=dx\,dy \Rightarrow A=\iint dx\,dy = \int_0^a dx\int_{y_1}^{y_2}dy = \int_0^a (y_2-y_1)\,dx$

$x_{e_1}=x$, $y_{e_1}=y$

$Q_y=\int x_e\,dA = \int_0^a x\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx\int_{y_1}^{y_2}dy = \int_0^a x(y_2-y_1)\,dx$

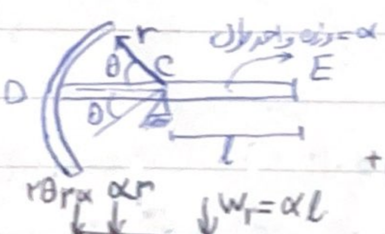
روش ①: $A=\int_0^a (y_2-y_1)\,dx = \int_0^a(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a^2}x^2)\,dx = \frac{1}{6}ab$

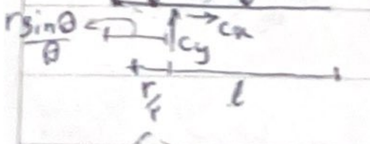
$Q_x=\int_A y_{e_1}\,dA = \int_0^a(\frac{y_1+y_2}{2})(y_2-y_1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a(y_2^2-y_1^2)\,dx = \frac{1}{15}ab^2$

$Q_y=\int_A x_{e_1}\,dA = \int_0^a x(y_2-y_1)\,dx = \frac{1}{12}a^2b$

$\Rightarrow Q_x=\int_A y_e\,dA=\bar{y}A \Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{15}ab^2 \Big/ \frac{1}{6}ab$; $Q_y=\int_A x_e\,dA=\bar{x}A \Rightarrow \bar{x}=\frac{\frac{1}{12}a^2b}{\frac{1}{6}ab}$

مثال: $CE=l$? طوری که مرکز ثقل کل اجسام روی نقطه C باشد.

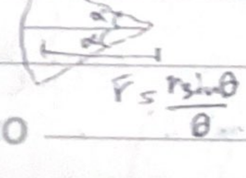




$+\circlearrowleft \sum M_C=0 \Rightarrow 2\theta r\alpha(\frac{r\sin\theta}{\theta}) + \alpha r(\frac{r}{2}) - \alpha l(\frac{l}{2})=0$

$\Rightarrow l^2=r^2+4r^2\sin\theta \Rightarrow l=r\sqrt{1+4\sin\theta}$

$\Rightarrow \theta=30^\circ=\pi/6 , l=\sqrt{3}r$; $\theta=\frac{\pi}{2} , l=\sqrt{5}r$

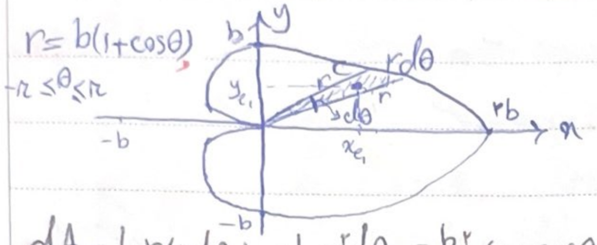


$\bar{r}=\frac{r\sin\theta}{\theta}$

۱۴۰۳/۲/۹ — استاتیک فصل ۵

مثال: مرکز سطح = ?

$r = b(1+\cos\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$



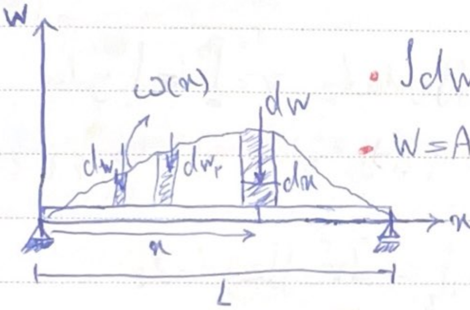
$$dA = \frac{1}{2} r (r\,d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{b^2}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta \Rightarrow A = \int_{-\pi}^{\pi} dA = \frac{3}{2}\pi b^2$$

$$x_{c_1} = \frac{2}{3} r\cos\theta = \frac{2}{3} b(1+\cos\theta)\cos\theta , \quad y_{c_1} = \frac{2}{3} r \sin\theta = \frac{2}{3} b (1+\cos\theta)\sin\theta \Rightarrow$$

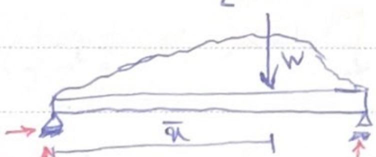
$$Q_x = \int_{-\pi}^{\pi} y_{c_1} dA = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{3} b(1+\cos\theta)\sin\theta \, \frac{b^2}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta = 0$$

$$Q_y = \int_{-\pi}^{\pi} x_{c_1} dA = \frac{5}{4}\pi b^3 \Rightarrow \bar{x}A = \int x_{c_1} dA \Rightarrow \bar{x} = \frac{5}{6} b$$

* بارهای گسترده روی تیرها:



- $\int dW = \int \omega(x)\,dx \Rightarrow W = \int \omega(x)\,dx$
- $W = A$, $\int dW = \int dA \Rightarrow W = \int dA = A$



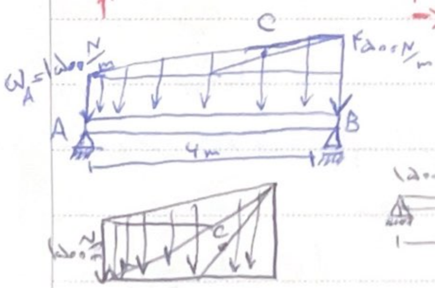
$W = W_1 + W_2 + \dots$

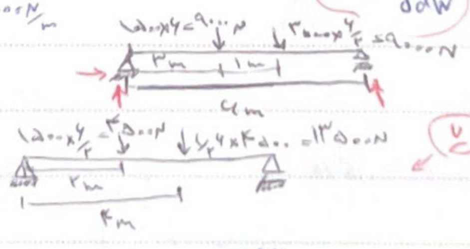
$$\bar{x}W = \sum_{i=1}^{n} x_i\,dW_i = \int x\,dW \quad (dW = dA)$$

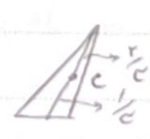
$\lim n \to \infty$

$$\Rightarrow \bar{x}W = \int x\,dW \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dW}{\int dW} , \quad \bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

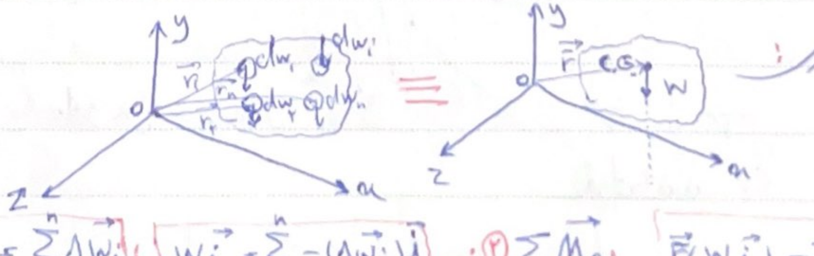
مثال







* مرکز ثقل یک جسم سه بعدی:



① $\boxed{\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{W}_i}$, $\boxed{-W\vec{j} = \sum_{i=1}^{n} -(\Delta W_i \vec{j})}$; ② $\sum M_O$: $\boxed{\vec{\bar{r}} \times (-W\vec{j}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (-\Delta W_i \vec{j})}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\bar{r}}\,W = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \Delta W_i} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \bar{r}W = \int_V \vec{r}\,dW$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} , \quad \vec{\bar{r}} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k} \Rightarrow (\bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k})W = \int_V (x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k})\,dW$$

مختصات مرکز ثقل
$$\begin{cases} \bar{x}W = \int x_{c_1} dW \\ \bar{y}W = \int y_{c_1} dW \\ \bar{z}W = \int z_{c_1} dW \end{cases} \xrightarrow[dW = \gamma dV]{W = \gamma V} \begin{cases} \bar{x}V = \int_V x_{c_1} dV \\ \bar{y}V = \int_V y_{c_1} dV \\ \bar{z}V = \int_V z_{c_1} dV \end{cases}$$
مختصات مرکز حجم

۱۴۰۳/۲/۹

استاتیک فصل ۵

۵.۳B - تمرین شده

صفحه تقارن: مرکز جرم روی صفحه تقارن است. صفحه ... x

$\bar{x}V = \int x_{el}\, dV = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

اجسام مرکب:

$\bar{x} \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} x_i W_i$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i W_i}{\sum W_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i W_i}{\sum W_i}$$

$\bar{x}V = \int_V x_{el}\, dV$

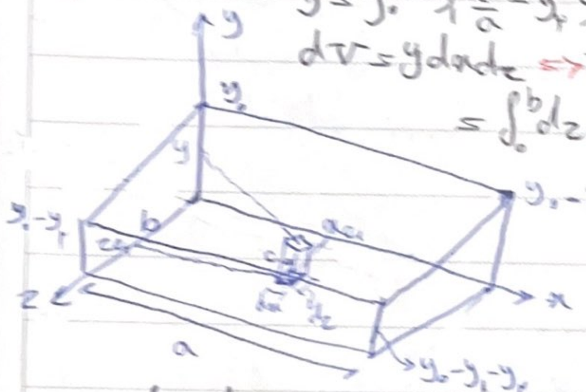
$\bar{y}V = \int_V y_{el}\, dV$

$\bar{z}V = \int_V z_{el}\, dV$

$\int dV = \iiint dx\,dy\,dz$; (آ در مثال از ...)

$V = \int dV$

مثال:



$y = y_0 - y_1 \frac{x}{a} - y_2 \frac{z}{b}$

$dV = y\,dx\,dz \Rightarrow V = \iint y\,dx\,dz \rightarrow V = \int_0^b dz \int_0^a y\,dx$

$= \int_0^b dz \int_0^a (y_0 - y_1 \frac{x}{a} - y_2 \frac{z}{b})\,dx \Rightarrow V = (y_0 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)ab$

$\bar{z}V = \int_V z_{el}\, dV = \iint z y\,dx\,dz$

$= \int_0^b z\,dz \int_0^a y\,dx = (\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{3}y_2)ab^2$

$$\bar{z} = \frac{\int z_{el}\, dV}{\int dV} = \frac{b(\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{3}y_2)}{y_0 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2}$$

۱۴۰۳/۲/۱۱

مرکز ثقل - مرکز جرم اجسام سه‌بعدی:

مرکز ثقل

$\bar{x}W = \int x_{el}\, dW$

$\bar{y}W = \int y_{el}\, dW, \quad W = \int dW$

$\bar{z}W = \int z_{el}\, dW$

(وزن مخصوص γ) $W = \gamma V$

$\bar{x}V = \int_V x_{el}\, dV$

$\bar{y}V = \int_V y_{el}\, dV$, $V = \int_V dV$

$\bar{z}V = \int_V z_{el}\, dV$, $V = \iiint dx\,dy\,dz$

$dV = y\,dx\,dz$

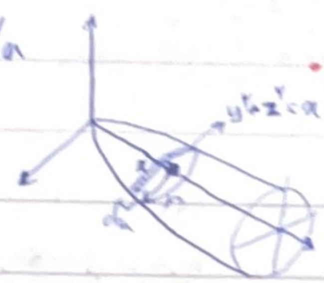
$z_{el} = z, \; x_{el} = x, \; y_{el} = \frac{y}{2}$

$\int x_{el} V = \iint x\,y\,dx\,dz$

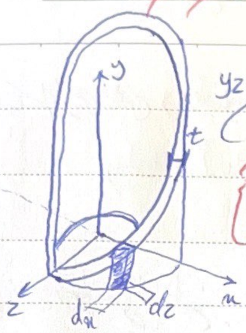
$dV = \pi r^2\,dx, \quad V = \int \pi r^2\,dx$

دوران حول محور:
$xz \Rightarrow \bar{y} = 0 \Rightarrow x_{el} = x$

$xy \Rightarrow \bar{z} = 0 \quad \bar{x} = ?$

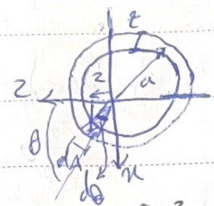


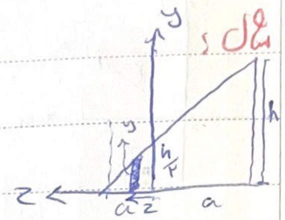
۱۴۰۳/۲/۱۱ — استاتیک فصل ۵ و ۹



yz : صفحه تقارن : $x_{el}=0$

$$\begin{cases} x_{el}=x \\ y_{el}=\frac{y}{2} \\ z_{el}=z \end{cases}$$





مثال :

$dv=y\,dA=y\,dx\,dz$, $\frac{y}{h/2}=\frac{a-z}{a} \Rightarrow y=\frac{1}{2}h(1-\frac{z}{a})=\frac{1}{2}h(1-\cos\theta)$

$x=a\sin\theta$, $z=a\cos\theta$, $dv=y\,dx\,dz=a\,d\theta\,y\,t=a\,t\,y\,d\theta$

$V=\int_0^{\pi/2} a t \frac{1}{2}h(1-\cos\theta)d\theta=\pi h t a$, $\bar{y}_{el}=\frac{1}{2}y$, $\int y_{el}dv=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}y\,a t y\,d\theta=\frac{3}{8}\pi t a h^2 \Rightarrow$

$V\bar{y}=\int y_{el}dv$, $\bar{y}=\frac{\frac{3}{8}\pi t a h^2}{\pi h t a}=\frac{3}{8}h$, $\bar{z}V=\int z_{el}dv=\int_0^{\pi/2} z\,a t y\,d\theta=-\frac{1}{2}\pi t a h$, ($a\cos\theta$)

$\bar{z}=\frac{\int z\,dv}{\int dv}=\frac{-\frac{1}{2}\pi t a h}{\pi h t a}=-\frac{1}{2}a$

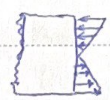
استاتیک فصل ۹

* ممان اینرسی : $W\bar{x}=\int x_{el}dW$, $W=\int dW$; $A\bar{x}=\int x_{el}dA$, $A=\int dA$ (دو بعدی)

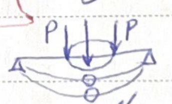
• نیروهای گسترده ای هستند که در اندازه آنها تابعی از فاصله آنها از یک محوری باشند.

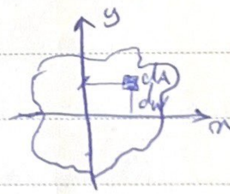
$$\begin{cases} dF=\sigma\,dA \\ dF=\frac{My}{I}dA \\ dF=ky\,dA \end{cases}$$

تنش $=\frac{\Delta F}{\Delta A}$



خمش خالص





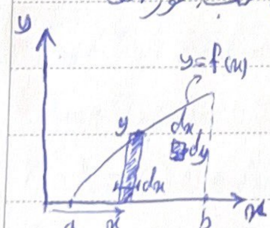
$F=\int dF=\int_A ky\,dA=k\int_A y\,dA=0$, $\int dM_z=y\,dF=\int ky^2dA$

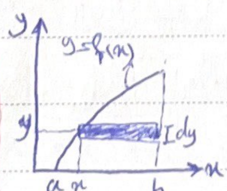
نقطه هم تنش خواهد بود

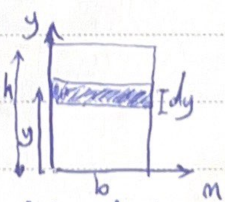
$\Rightarrow M_z=k\int_A y^2dA$; $I_x=\int_A y^2dA$, $I_y=\int_A x^2dA$

ممان اینرسی نسبت به محور y ها ، گشتاور دوم سطح نسبت به محور x ها

•







$dI_x=\frac{1}{3}dx\,y^3$

$\boxed{dI_x=\frac{1}{3}y^3dx}$

$$\begin{cases} dA=dx\,dy , A=\iint dx\,dy \\ I_x=\int y^2dA=\iint y^2dx\,dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA=y\,dx \Rightarrow A=\int_a^b y\,dx \\ I_y=\int_A x^2dA=\int_a^b x^2y\,dx \end{cases}$$

$dA=(b-x)dy$

$I_x=\int y^2dA=\int_0^{f(b)} y^2(b-x)dy$

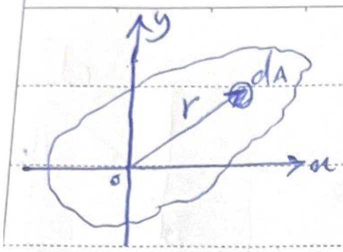
$\int dA=\int b\,dy \Rightarrow A=b\int_0^h dy=bh$

$dI_x=(b\,dy)y^2=by^2dy$

$\boxed{I_x=b\int_0^h y^2dy=\frac{1}{3}bh^3}$

۱۴۰۳/۲/۱۱

استاتیک فصل ۹

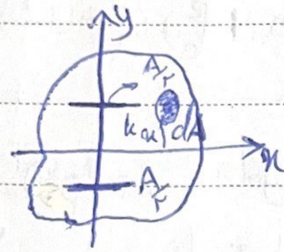


* ممان اینرسی قطبی (در فصل پیچش کاربرد دارد):

$$J_O = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2+y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y$$

$$\Rightarrow \boxed{J_O = I_x + I_y}$$

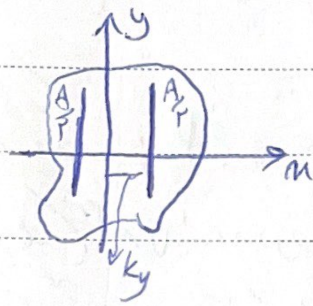
* شعاع ژیراسیون سطح:



• k_x: شعاع ژیراسیون نسبت به محور x

$$I_x = \int y^2 dA = k_x^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}}$$

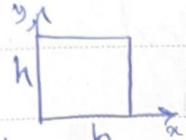


• k_y: شعاع ژیراسیون نسبت به محور y

$$I_y = \int x^2 dA = k_y^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}}$$

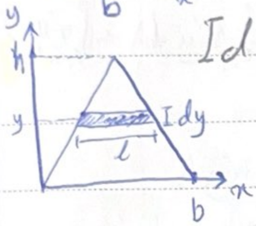
مثال: $k_x=?$



$I_x=\frac{1}{12}bh^3$, $A=bh$ $\Rightarrow k_x^2=\frac{I_x}{A}=\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}=\frac{1}{12}h^2$

$\Rightarrow \boxed{k_x=\frac{\sqrt{3}}{3}h}$

مثال: $I_x=?$



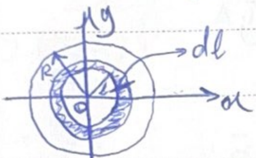
$dI_x=dA\,y^2$

$\frac{l}{b}=\frac{h-y}{h}\Rightarrow l=\frac{h-y}{h}b$

$I_x=\int_A y^2dA=\int_0^h y^2l\,dy=\int_0^h y^2\left(\frac{h-y}{h}b\right)dy$

$I_x=\frac{bh^3}{12}$, $k_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$

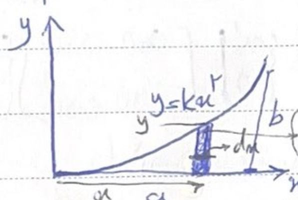
مثال: $J_0=?$



$dJ_0=2\pi\rho\,d\rho(\rho^2)\Rightarrow J_0=2\pi\int_0^R\rho^3d\rho$

$\Rightarrow J_0=\frac{1}{2}\pi\rho^4$, $J_0=I_x+I_y=2I_x=2I_y\Rightarrow I_x=I_y=\frac{1}{4}\pi R^4$

مثال:



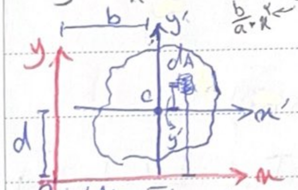
$\boxed{\frac{1}{3}(dx)y^3=dI_x}$

$y=\frac{b}{a^2}x^2$, $A=\frac{1}{3}ab$; $dA=y\,dx$

$I_y=\int_A x^2dA$

$I_x=\int_A y^2dA=\int_0^a\frac{1}{3}y^3dx=\int_0^a\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3dx=\boxed{\frac{ab^3}{21}=I_x}$

$I_y=\int_A x^2dA=\int_0^a x^2\underbrace{y}_{\frac{b}{a^2}x^2}dx\Rightarrow I_y=\frac{a^3b}{5}\Rightarrow\begin{cases}k_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}=\sqrt{\frac{b^2}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}b\\ k_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{3}{5}a^2}=\sqrt{\frac{3}{5}}a\end{cases}$



* قضیه محورهای موازی:

$I_x=\int_A y^2dA=\int_A(y'+d)^2dA$

$=\int_A y'^2dA+\int_A d^2dA+2d\int_A y'dA\Rightarrow\boxed{I_x=I_{x'}+d^2A}$

$\int y'dA=\bar{y}'A=0A=0$

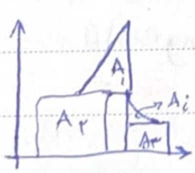
همچنین: $\boxed{I_y=I_{y'}+b^2A}$

① $I_x=I_{x'}+Ad^2\Rightarrow Ak_x^2=Ak_{x'}^2+Ad^2\Rightarrow\boxed{k_x^2=k_{x'}^2+d^2}$

② $I_y=I_{y'}+Ab^2\xrightarrow{①+②}\boxed{J_O=J_C+A(d^2+b^2)=J_C+AR^2}$

$k_O^2A=k_C^2A+AR^2\Rightarrow\boxed{k_O^2=k_C^2+R^2}$

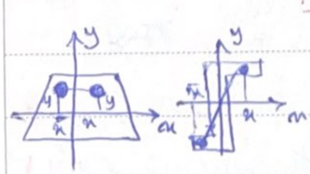
* ممان اینرسی سطوح مرکب:



$k_x=\sqrt{\frac{\sum I_{x_i}}{\sum A_i}}$

* ممان اینرسی ضربی[1]: $\boxed{I_{xy}=\int_A xy\,dA}$ خمش غیر متقارن

• تقارن:

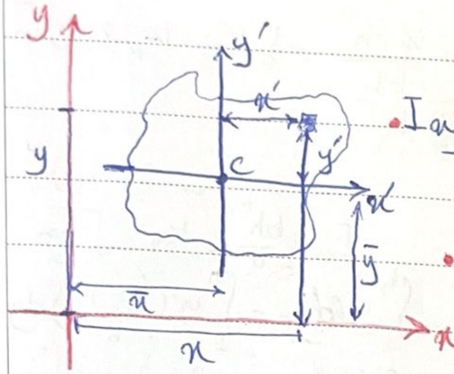


$I_{xy}=\int_A xy\,dA=0$ ← در صورت داشتن یک محور تقارن

۱- فصل ۹ کتاب مکانیک برداری، بیر جانستون

۱۴۰۳ / ۲ / ۱۶

استاتیک، فصل ۹



* قضیهٔ محورهای موازی برای ممان اینرسی ضربی:

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_A (\bar{x}+x')(\bar{y}+y')\,dA$$

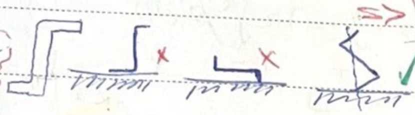
$$= \int_A \bar{x}\bar{y}\,dA + \int_A \bar{x}y'\,dA + \int_A x'\bar{y}\,dA + \int_A x'y'\,dA$$

$\int_A x'\,dA = \bar{x}'A = 0$, $\int y'\,dA = 0$

$$\Rightarrow I_{xy} = \int_A x'y'\,dA + \bar{x}\bar{y}A$$

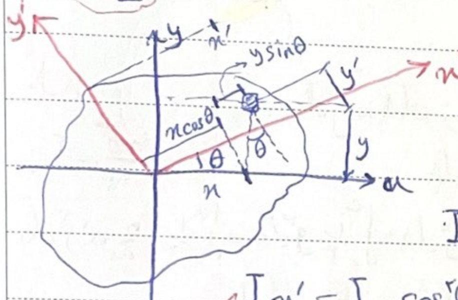
$$\Rightarrow \boxed{I_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A}$$

$\sigma = \frac{MC}{I}$



بیشترین I، کمترین تنش

• تنش:



• I_x, I_y, I_{xy}, θ

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2\,dA = \int_A (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\,dA$$

$$\begin{cases} I_{x'} = I_x\cos^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_y\sin^2\theta \\ I_{y'} = I_y\sin^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_y \\ I_{x'y'} = (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{x'} = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \quad (1) \\ I_{y'} = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \quad (2) \\ I_{x'y'} = \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

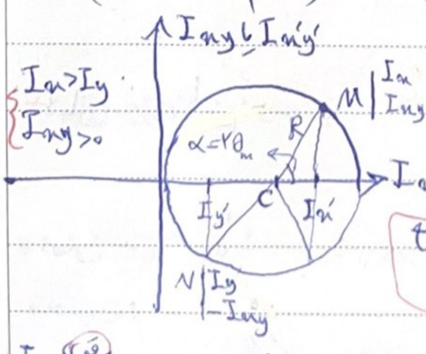
$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0$

$$\begin{cases} I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \\ J_0 = \int_A \rho^2\,dA = I_x + I_y \end{cases}$$

فرض: $I_{x'} > I_{y'}$

$$\Rightarrow \left(I_{x'} - \frac{I_x+I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \Rightarrow \boxed{(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2}$$

• دایرهٔ مور[1]:



• $I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta = 0$

$$\boxed{tg\,2\theta_m = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

برای θ_m دو مقدار با اختلاف $\pi/2$ بدست می‌آید

$$\tan\alpha = \frac{2I_{x'y'}}{I_{x'} - I_{ave}} = \frac{2I_{x'y'}}{I_{x'} - I_{y'}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\theta_m}$$

$\rightarrow \tan\alpha = \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}$

* محورهای اصلی[2]: محورهایی هستند که ممان اینرسی حول آنها max یا min است.

I_{max} (محور قوی)
I_{min} (محور ضعیف)

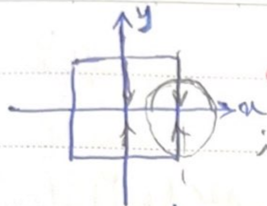
۱- اگر یک محور تقارن داشته باشیم: $\rightarrow I_{xy} = 0$ $\rightarrow$ محور اصلی

۲- یک محور اصلی، لزوماً محور تقارن نیست. ۳- یک مقطع داده شده دارای دو محور اصلی خواهد بود.

۳- اگر محور اصلی نام دیگر Principal centroidal Axes (محور اصلی عبوری از مرکز سطح).

1- Mohr's circle
2- Principal Axes

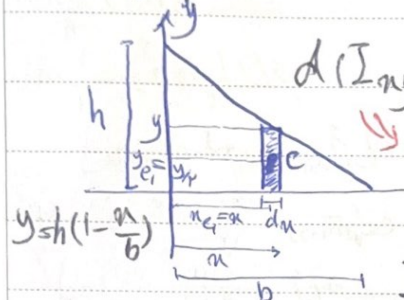
نکته • دایره مور؟



$I_{xy}=0$ ، $I_x=I_y$

درمحوری که از مرکز دایره عبور می‌کند

مثال: $I_{xy}=?$ ، $I_{x''y''}=?$



$d(I_{xy}=I_{x'y'}+xyA)$

$\Rightarrow dI_{xy}=dI_{x'y'}+x_{el}y_{el}A = 0+x\frac{y}{2}(y\,dx)$

$\Rightarrow I_{xy}=\int_0^b \frac{1}{2}xy^2\,dx=\frac{1}{24}b^2h^2$

$y=h(1-\frac{x}{b})$

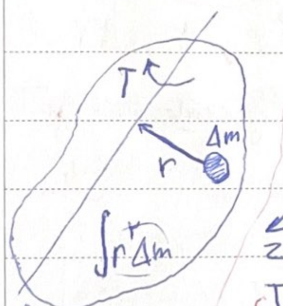
$I_{xy}=I_{x''y''}+\bar{x}\bar{y}A$

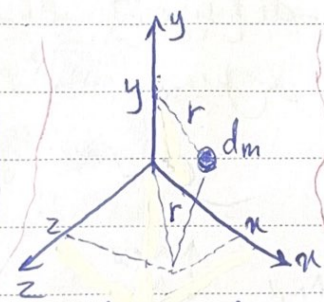
$I_{x''y''}=I_{xy}-\bar{x}\bar{y}A=\frac{1}{24}b^2h^2-\frac{1}{3}b\frac{1}{3}h(\frac{1}{2}bh)=-\frac{1}{72}b^2h^2$

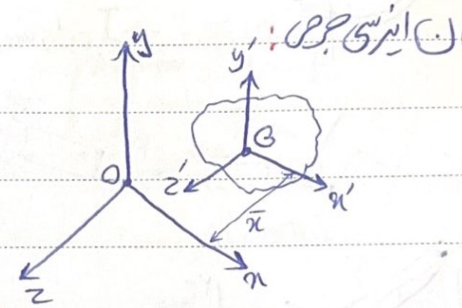
۱۴۰۳/۲/۱۹ :

* ممان اینرسی جرمی:

$I=\int r^2\,dm$







$\int P\,dt=m\Delta v$

$\Delta v=\frac{1}{m}\int P\,dt$

$$\begin{cases} I_y=\int r^2dm=\int(x^2+z^2)dm \\ I_x=\int(y^2+z^2)dm \\ I_z=\int(x^2+y^2)dm \end{cases}$$

$\boxed{I=\bar{I}+md^2}$

$\boxed{K=\sqrt{\frac{I}{m}}}$

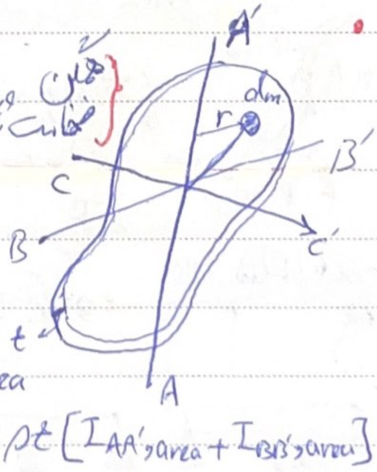
$K^2m=\bar{k}^2m+md^2$

$\boxed{K^2=\bar{k}^2+d^2}$

صفحه نازک

$\Sigma M=I\alpha$

همین وبه صفحات نازک



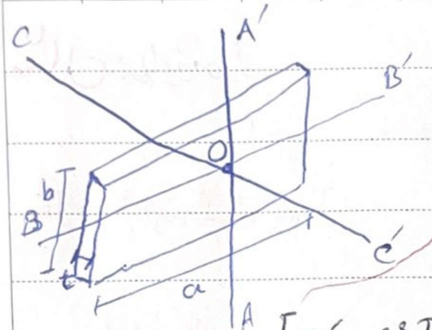
$I_{AA',mass}=\int r^2dm=\rho t\int_A r^2dA$
$=\rho t\, I_{AA',area}$

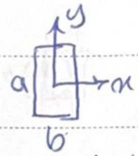
$dm=t\rho\, dA$

$I_{AA',mass}=\rho t\, I_{AA',area}$, $I_{BB',mass}=\rho t\, I_{BB',area}$

$I_{CC',mass}=\int r^2dm=\rho t\int r^2dA=\rho t\, I_{CC',area}$; $I_{CC'}=\rho t\,[I_{AA',area}+I_{BB',area}]$

مثال:





$m = abt\rho$

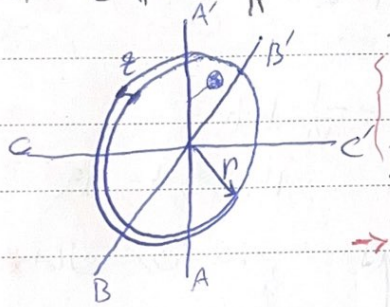
$I_{AA',mass} = \rho t I_{AA',area} = \rho t(\frac{1}{12}ba^3) = \frac{1}{12}ma^2$

$I_{BB',mass} = \rho t I_{BB',area} = \rho t(\frac{1}{12}ab^3) = \frac{1}{12}mb^2$

$I_{CC',mass} = \rho t I_{CC',area} = \rho t J_{O,area} = \rho t[I_{AA',area} + I_{BB',area}]$

$= \rho t[\frac{1}{12}ba^3 + \frac{1}{12}ab^3] = \frac{\rho abt}{12}[a^2+b^2] \Rightarrow I_{CC',mass} = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$ مستطیل

مثال:



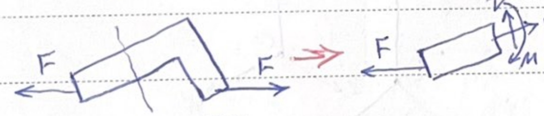
$I_{AA',mass} = \rho t I_{AA',area} = \rho t[\frac{1}{4}mr^2]$

$I_{BB',mass} = \rho t I_{BB',area} = \rho t[\frac{1}{4}mr^2]$

$I_{CC',mass} = \rho t[I_{AA',area} + I_{BB',area}]$

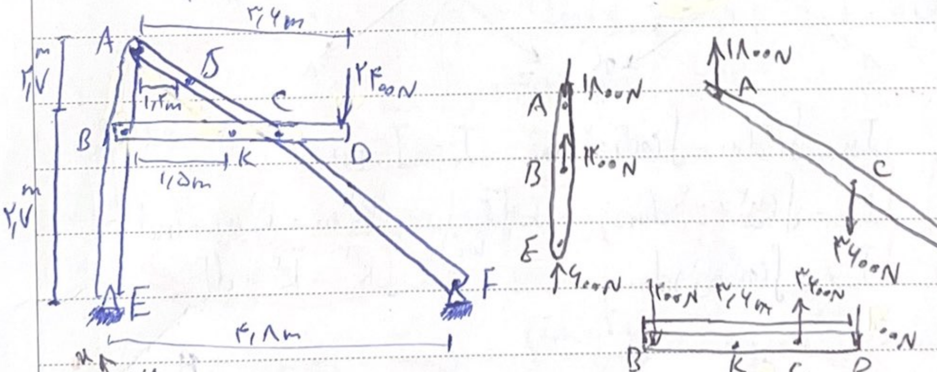
$\Rightarrow I_{CC',mass} = \rho t[\frac{1}{2}mr^2]$ دایره

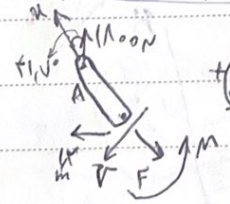
فصل ۷، ۱۴۰۳ / ۲ / ۲۳



* عضو دو نیرویی، نیروهای داخلی:

مثال:



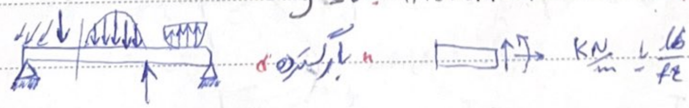


$\circlearrowleft \sum M_J = 0;\ -1800(1.2) + M = 0 \Rightarrow M = 2160\ N$

$\sum F_x = 0;\ 1800\cos 41.7^\circ - F = 0 \Rightarrow F = 1344.4\ N$

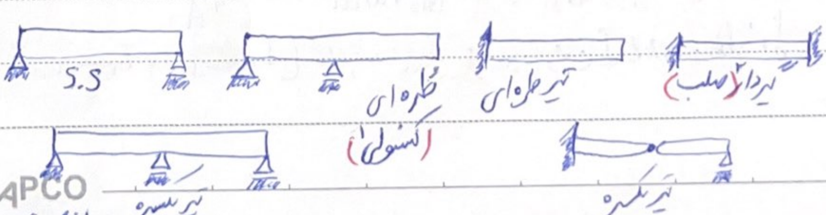
$\sum F_y = 0;\ 1800\sin 41.7^\circ - V = 0 \Rightarrow V = 1197.7\ N$

* تیرها:



بارگسترده: $\frac{KN}{m}$ یا $\frac{lb}{ft}$

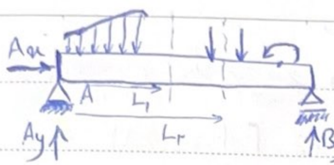
• انواع تیرها:



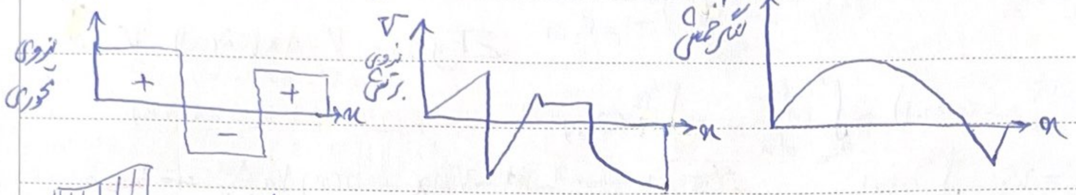
PAPCO

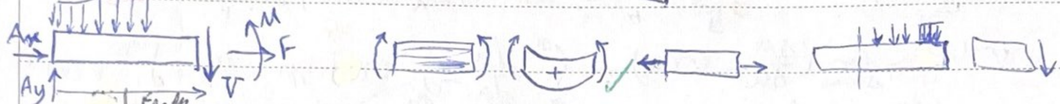
1 – cantilever
2 – fixed support

* تیرها و کابل ها (ادامه):

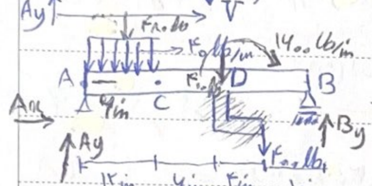


$0 < x < L_1$





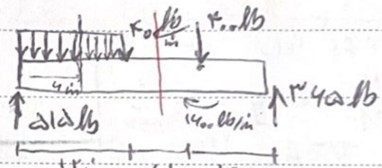
مثال:



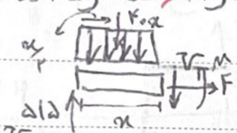
$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0;\ A_x = 0$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;\ -480\times 6 - 18\times 400 - 1400 + B_y(32) = 0 \Rightarrow B_y = 365\,lb$

$+\uparrow \sum F_y = 0;\ A_y - 400 + B_y = 0 \Rightarrow A_y = 515\,N$



(۱)
$\sum F_x = 0;\ F = 0$ (۱)

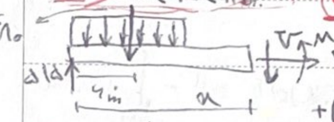


$\sum F_y = 0;\ 515 - 40x - V = 0$

$V = 515 - 40x$ (۲), $\circlearrowleft \sum M_A = 0;\ -515(x) + M + 40x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow M = 515x - 20x^2$ (۳)

(۱),(۲),(۳) $\Rightarrow 0 < x < 12\,in$

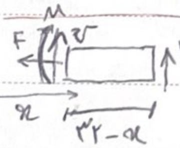
(۲) $12\,in < x < 18\,in$



$\sum F_x = 0;\ F = 0,\ \sum F_y = 0;\ 515 - 480 - V = 0 \Rightarrow V = 35\,lb$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;\ -515x + 480(x-6) + M = 0 \Rightarrow M = 35x + 2880$

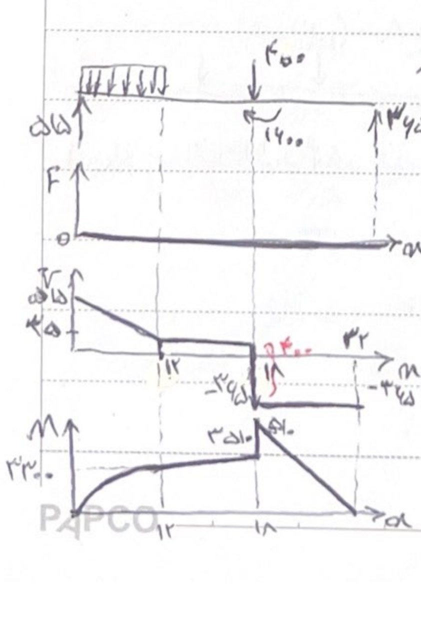
(۳)

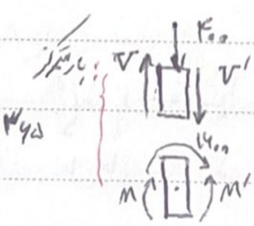


$\sum F_x = 0;\ F = 0,\ \sum F_y = 0;\ V + 365 \Rightarrow V = -365$ $\Rightarrow 18 < x < 32\,in$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;\ -M + 365(32 - x) = 0 \Rightarrow 365\times 32 - 365x = M$

• دیاگرام:



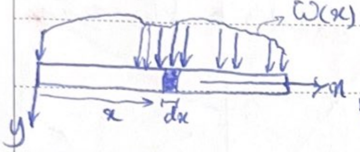


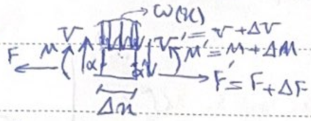
$V - 400 - V' = 0 \Rightarrow \boxed{V' = V - 400}$

$-M + M' - 1400 = 0 \Rightarrow \boxed{M' = M + 1400}$

۱۴۰۳/۲/۲۵ — «استاتیک، فصل ۷»

* رابطه بین بار گسترده و دیاگرام های برشی و خمشی:





$\sum F_x = 0: \; F - F' = 0 \Rightarrow \Delta F = 0$

$\sum F_y = 0: \; V - \Delta x(\omega(x)) - V' = 0 \Rightarrow V - \Delta x(\omega(x)) - V - \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V = \Delta x(\omega(x))$

$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\omega(x)\right) \Rightarrow \int_{x_A}^{x_B} \frac{dV}{dx} = -\int_{x_A}^{x_B} \omega(x)$ (۱)

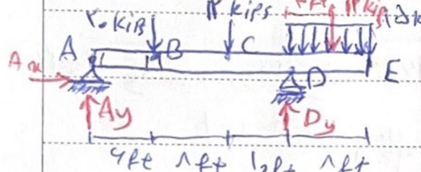
$\Rightarrow V_B = V_A - \int_{x_A}^{x_B} \omega(x)$

$+\circlearrowleft \sum M_{x'} = 0: \; -M - V\Delta x + \underbrace{\omega(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2}}_{\simeq 0} + \overbrace{M'}^{M+\Delta M} = 0$

$\Rightarrow \Delta M = V\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta M}{\Delta x} = V(x)\right) \Rightarrow \int_{x_A}^{x_B} \frac{dM}{dx} = \int_{x_A}^{x_B} V(x) \Rightarrow \boxed{M_B = M_A + \int_{x_A}^{x_B} V(x)}$ (۲)

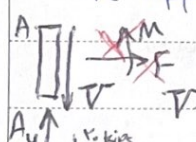
$\frac{dM}{dx} = V(x) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -\omega(x) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -\omega(x)}$ (۳)

۱۴۰۳/۲/۲۶:



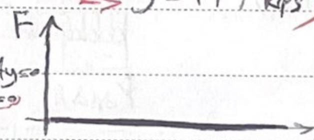
مثال: $+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \; -20 \times 6 - 12 \times 14 - 12 \times 28 + 24 D_y = 0$

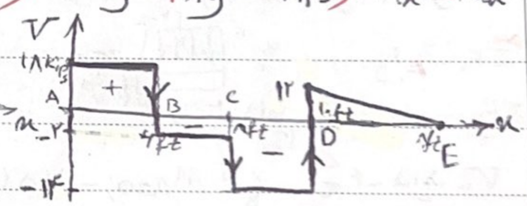
$\Rightarrow D_y = 26 \uparrow$ kips , $\sum F_y = 0: A_y = 18$ kips , $\sum F_x = 0: A_x = 0$

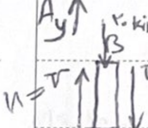


$\sum M_y = 0: \; M + 0 \times A_y = 0 \Rightarrow M = 0$

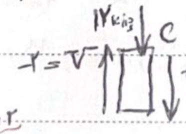
$V = A_y = 18$ kips



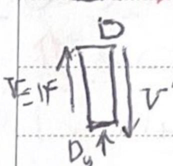




$V' + 20 - V = 0 \Rightarrow V' = \underset{18}{V} - 20 = -2$



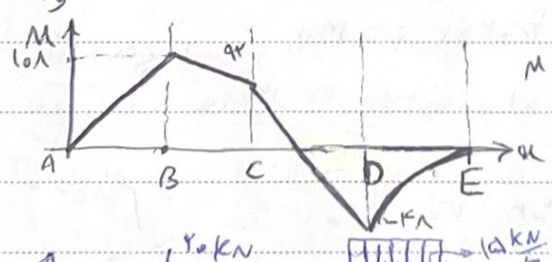
$V - 12 - V' = 0 \Rightarrow V' = \underset{=-2}{V} - 12 = -14$



$V' - D_y - V = 0$

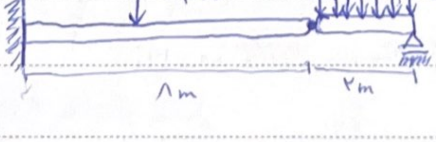
$V' = D_y + V = 26 + (-14) = 12$

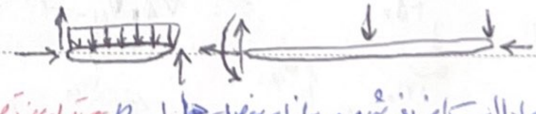
$V_E = V_D - \int_{x_D}^{x_E} \omega(x)\,dx = 12 - \int_{24}^{32} 1.5\,dx = 12 - 1.5x\Big|_{24}^{32} = 0$



$\sum M_y = 0: \; M = 0$

مثال:





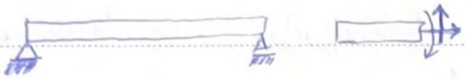
(تعداد معادلات اضافه شده به ازای مفصل ها: $n-1$ ← تعداد عضو متصل به مفصل)

۱۴۰۳/۲/۳۰

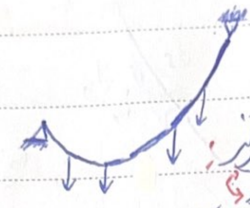
استاتیک فصل ۷

* کابل ها:

تیرها:



کابل:



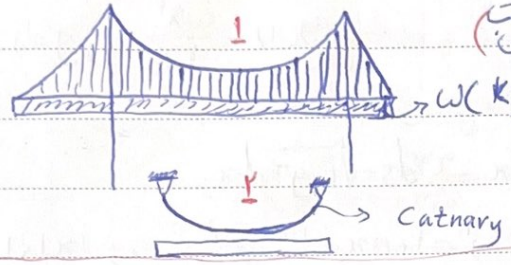
• بارگذاری متمرکز:

* وزن کابل در نظر گرفته نمی شود.

• بارگذاری پیوسته (شکل سهمی)

۱. بارگذاری در امتداد افق (بارگذاری ثابت)

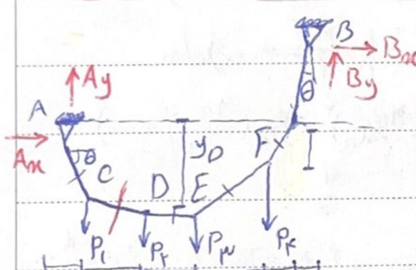
۲. بارگذاری در امتداد کابل



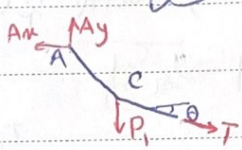
$\omega\ (kN/m)$

Catnary

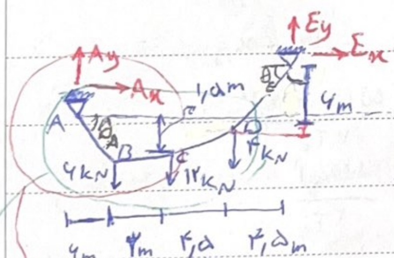
۱. تغییر شکل کابل ۲. نیروی کشش کابل: نیاز به یک معادله اضافی برای حل



$\sum F_x = 0;\ \boxed{A_x = T\cos\theta}$



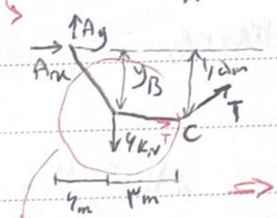
مثال:



$+\circlearrowleft \sum M_E = 0:\ +A_x(6) - A_y(18) + 6\times 12 + 12\times 9 + 4(4.5) = 0$

$\Rightarrow 6A_x - 18A_y + 198 = 0 \quad (1)$

$\sum F_x = 0;\ A_x + E_x = 0 \quad (2)\ ,\ \sum F_y = 0;\ A_y + E_y = 22\ kN \quad (3)$



$+\circlearrowleft \sum M_C = 0;\ -A_y(9) + A_x(1.5) - 6\times 3 = 0 \quad (4)$

$(1)+(4) \Rightarrow A_x = -18\ kN,\ A_y = 5\ kN$

$\Rightarrow E_x = -A_x = 18\ kN\ ,\ E_y = 22 - A_y = 17\ kN$

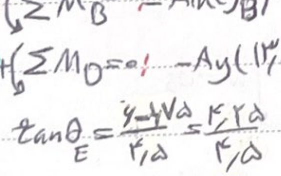
سوال:
۱. ارتفاع B و D ؟
۲. شیب ماکزیمم و کشش ماکزیمم در کابل؟

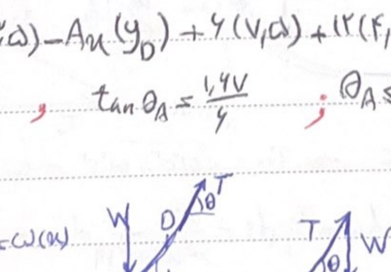
$+\circlearrowleft \sum M_B = 0;\ -A_x(y_B) - A_y(6) = 0 \Rightarrow y_B = -\frac{6A_y}{A_x} = 1.67\ m$

$+\circlearrowleft \sum M_D = 0;\ -A_y(13.5) - A_x(y_D) + 6(7.5) + 12(4.5) = 0 \Rightarrow \boxed{y_D = 1.75\ m}$

$\tan\theta_E = \frac{6-1.75}{4.5} = \frac{4.25}{4.5}\ ,\ \tan\theta_A = \frac{1.67}{6}\ ;\ \theta_A < \theta_E\ ,\ A_x = T\cos\theta \Rightarrow T = \frac{A_x}{\cos\theta_A} = 24.8\ kN$

* کابل با بار گسترده:



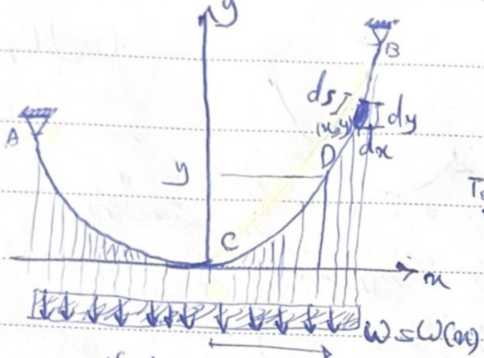


$$\begin{cases} T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \\ \tan\theta = \dfrac{W}{T_0} \end{cases}$$

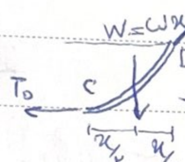
$T\sin\theta = W\ ,\ T\cos\theta = T_0$

۱۴۰۳ / ۲ / ۳۰

استاتیک فصل ۷



• بارگذاری گسترده در امتداد افق (بارگذاری با شدت ثابت):



$+\circlearrowleft \sum M_D=0 : -T_0(y)+wx(\frac{x}{2})=0$

$\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{wx^2}{2T_0}}$; $y'(x)=\frac{wx}{T_0}$

$L_B=\int_{s_1}^{s_2} ds$; $ds^2=dx^2+dy^2=(1+y'^2)dx^2 \Rightarrow ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

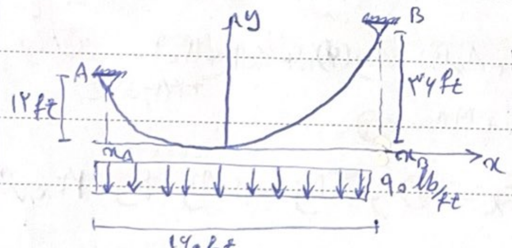
بسط $\Leftarrow (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\dots$; $|x|<1$

$L_B=\int_0^{x_B}(1+y'^2)^{1/2}dx=\int_0^{x_B}(1+\frac{w^2x^2}{T_0^2})^{1/2}dx=\int_0^{x_B}(1+\frac{w^2x^2}{2T_0^2}-\frac{1}{8}\frac{w^4x^4}{T_0^4}+\dots)dx$

$\Rightarrow L_B=x_B(1+\frac{w^2x_B^2}{6T_0^2}-\frac{w^4x_B^4}{40T_0^4}+\dots)=x_B(1+\frac{2}{3}(\frac{y_B}{x_B})^2-\frac{2}{5}(\frac{y_B}{x_B})^4+\dots)$

$\Rightarrow |\frac{wx}{T_0}|<1 \Rightarrow \frac{w^2x^2}{T_0^2}<1$, $|2y/x|<1 \Rightarrow \boxed{y/x<\frac{1}{2}}$

مثال: T_{max} و $T_{min}=T_0=?$



$x_B-x_A=160\,ft \Rightarrow x_A=-160+x_B$

$y_A=\frac{wx_A^2}{2T_0} \Rightarrow 12=\frac{w(x_B-160)^2}{2T_0}$

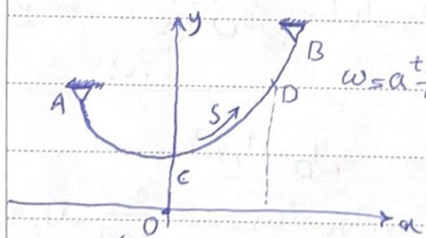
$y_B=\frac{wx_B^2}{2T_0} \Rightarrow 36=\frac{w(x_B)^2}{2T_0}$

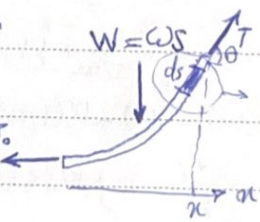
$2x_B^2-960x_B+76800=0 \Rightarrow \begin{cases} x_B=101.4\,ft \ \checkmark \\ x_B=378\,ft \ \times \end{cases} \Rightarrow y_B=\frac{wx_B^2}{2T_0} \Rightarrow T_0=12862\,lb$

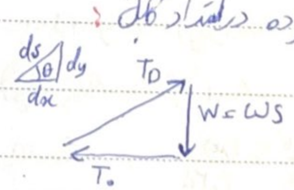
$T_{max}=\sqrt{T_0^2+W^2}=\sqrt{T_0^2+w^2x_B^2}=15.77\,kips$

۱۴۰۳/۳/۱:

* بارگذاری گسترده در امتداد کابل:







کشش در D ; $T_D=\sqrt{T_0^2+W^2}$; $T_0=wc \Rightarrow T_D=\sqrt{w^2c^2+w^2s^2}=w(c^2+s^2)^{1/2}$

$dx=ds\cos\theta$; $\cos\theta=T_0/T \Rightarrow dx=\frac{T_0}{T}ds=\frac{wc}{w(c^2+s^2)^{1/2}}ds \Rightarrow$

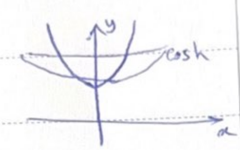
$\int_0^x dx=\int\frac{c\,ds}{(c^2+s^2)^{1/2}} \Rightarrow x=\int_0^s c(c^2+s^2)^{-1/2}ds=c\left[\sinh^{-1}\frac{s}{c}\right]_0^s=c\sinh^{-1}\frac{s}{c}$ $\sinh\frac{x}{c}dx$

$\Rightarrow \sinh\frac{x}{c}=\frac{s}{c} \Rightarrow \boxed{s=c\sinh\frac{x}{c}}$; $\tan\theta=\frac{dy}{dx}$ $dy=\tan\theta\,dx$ $\frac{W}{T_0}dx=\frac{ws}{wc}dx=\frac{s}{c}dx$

ادامه در صفحه بعد

$y-c$

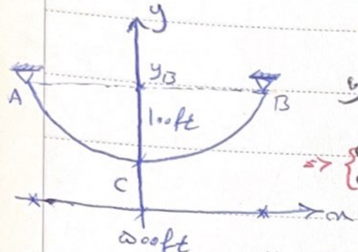
$$\int_c^y dy = \int_0^x \sinh\frac{x}{c}\,dx = c\left[\cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = c\cosh\frac{x}{c} - c \Rightarrow \boxed{y = c\cosh\frac{x}{c}}$$



$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2\frac{x}{c} - \sinh^2\frac{x}{c} = 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{c}\right)^2 - \left(\frac{s}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y^2 - s^2 = c^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = s^2 + c^2 = \frac{T^2}{\omega^2} \Rightarrow \boxed{T = \omega y}$$

مثال:



$\omega = 3\,lb/ft$ ، $T_{max} = ?$ ، $T_{min} = T_0 = ?$ ، طول کابل $(S) = ?$

$$y = c\cosh\frac{x}{c}, \quad y_B = 100 + c = c\cosh\frac{250}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{100}{c} + 1 = \cosh\frac{250}{c}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 300 & 1.33 \\ c = 328 & 1.305 \end{cases}$$

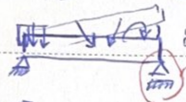
$$\begin{cases} T_{min} = T_0 = \omega c = 3 \times 328 = 984\,lb \\ T_{max} = T_B = \omega y_B = 3(100 + 328) = 1284\,lb \end{cases}$$

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \Rightarrow s_B = 275\,ft \Rightarrow L = 2s_B = 550\,ft$$

* اصل کار مجازی:

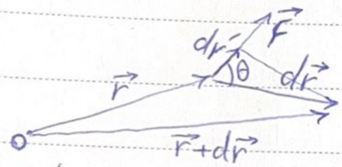
• در تحلیل سازه‌های (دو بعدی) از معادلات تعادل استفاده می‌شود: $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ ، $\sum M = 0$

• برای یک سیستم (سازه‌ای) در حال تعادل:



معادله: $A_y = 2$

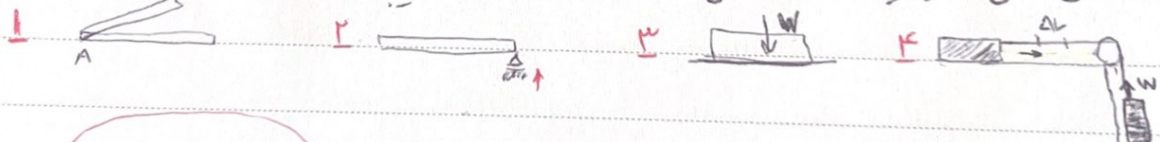
* کار انجام شده توسط یک نیرو:

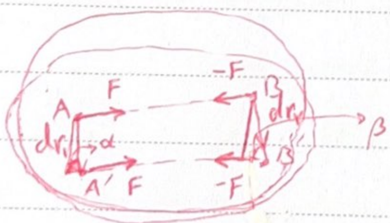


$$du = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\theta$$
$$= F(\underbrace{dr\cos\theta}_{dr'})$$

$(\theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi)$

• در استاتیک چه نیروهایی کار انجام نمی‌دهند؟ ۱ نیروهای اعمال شده بر یک نقطهٔ ثابت ۲ نیروهای عمود بر سطح (در مسائل اصطکاک کل)
۳ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های غلطکی ۴ کار انجام شده توسط ترکیبی از نیروها





• کار نیروهای داخلی در یک جسم صلب برابر با صفر است.