

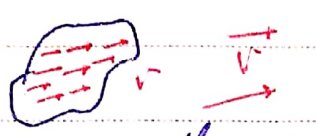


کانال مهمات شریف

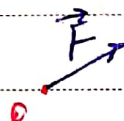
✓ @SHARIF\_IE



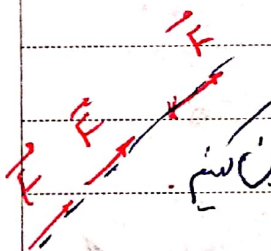
1

1. بردار آکلو:   
 هر عبارت که می توانش بردار شد

2. بردار عبت:

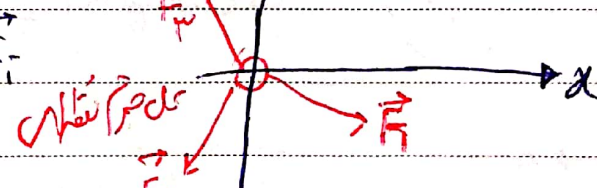
  
 صفاً با بردارهای موازی باشد

3. بردار درجه اول (الغزیه):

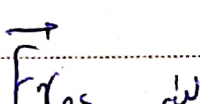
خطا:   
 بردارهایی که می توانی روی خطا بردارهای توابع با بردارهای

معر نقطه ای (particle):

  
 می داریم که هر یک نقطه از دو تعریف می شود.  
 نیکی این ابعاد به هر نقطه ای  
 فقط یک نقطه عمل می کند.

$$\vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_i$$

  
 با بردارهای  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  را در دستگاه  $x, y$  نویسیم و می توانیم جمع کنیم.

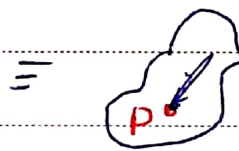
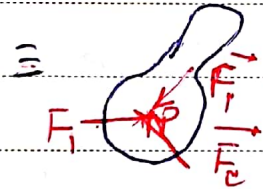
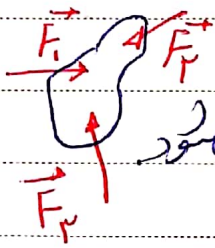


مفهوم تعامل انتگرالی بر این اساس: باید جسم  $P$  ساکن باشد.

چون اگر باقی بر این تعامل استاتیکی:  $\sum \vec{F} = 0$  تا در استاتیکی

جسم را تغییر است و حرکتی ندارد

جسم (body): موجودی که بر آن دایره و حجم استاتیکی هستند.



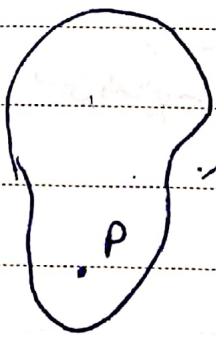
کمیته نقطه  $P$  به آن  $P$

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$\sum \vec{F}$$

آیا نقطه  $P$  یک نقطه خاص از اجزاست یا اینکه دلخواه است؟

پاسخ: صرف تداخل استاتیکی و اجزاء



body  
 $P$  در تمام زمان ساکن باشد.  
 جسم در تعادل است؟

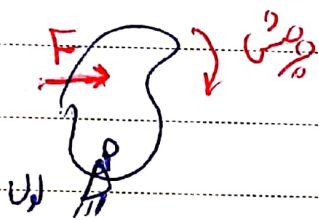
مفهوم تعامل انتگرالی بر این اساس:  $P$

مانده می ماند: ضربه

تا زمانی که آن ساکن هست.

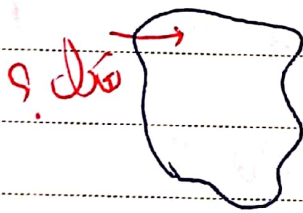


سؤال: آیا جسم زیر در تعادل است؟

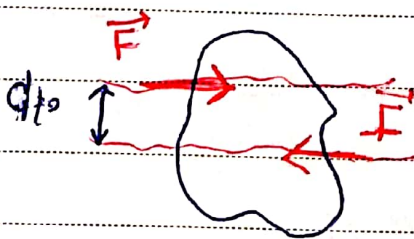


نقطه P حول می‌گردد.

سرک نام و کف برای تعادل نیوزی امکان‌پذیر است؟



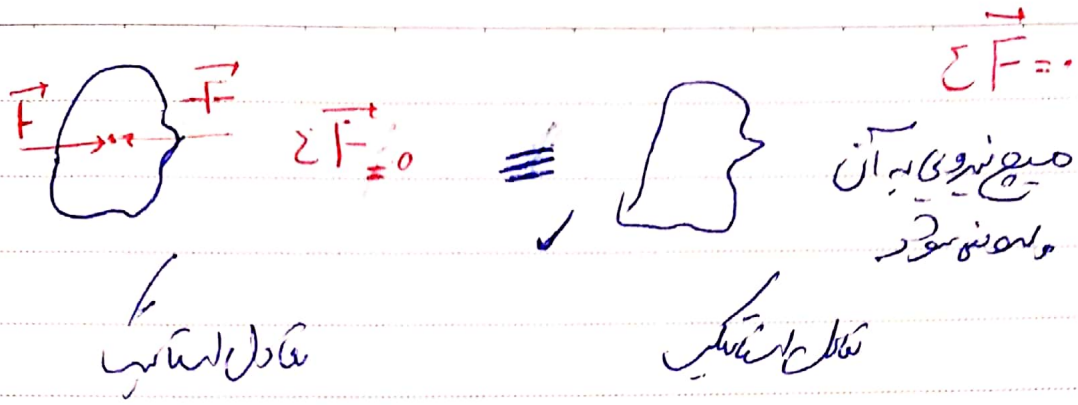
① برآیند نیروهای ولعظیم باید صفر شود.  
برقراری قانون دوم نیوتن  $(F = ma)$  شرط لازم است.



مثال: تعادل؟

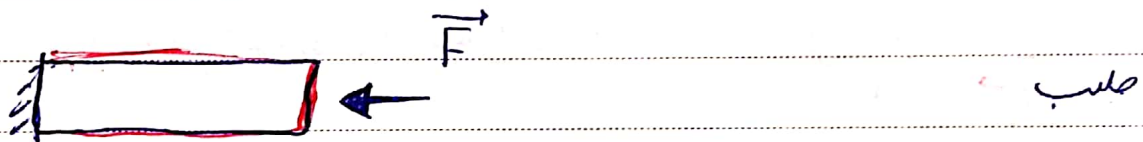
$$\sum F = F - F = 0$$

تعادل استاتیکی ندارد. / غیر چرخشی.

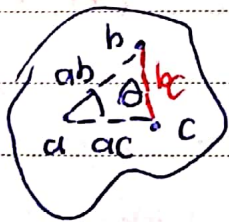


نتیجه: این دو سیستم متادل هستند. نیروها بر یکدیگر اثر دارند.

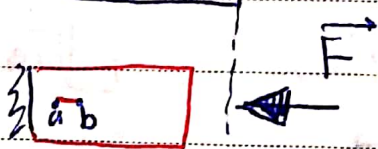
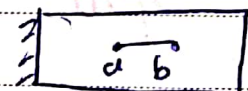
مفهوم جسم صلب و انعطاف پذیر:



جسم صلب: بدانی که نیروی خاص و معین، عامل حرکت در آن شکل گرفته است.



خواهیم دید: نسبت  $ab, ac$  و  $\theta$  اثر  $\theta$  نسبت به  $bc$  است.



انعطاف پذیر:



تغییر شکل ایجاد می شود



چون نیرو در آنجا وارد می شود

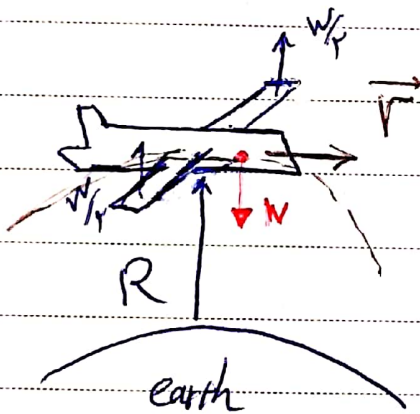
P4PCO

نکته: اگر جسم تغییر شکل پذیر باشد (مثلاً جسم تغییر شکل پذیر مثل مایه را تحلیل کنیم):

[باب ۱] با نیروی که به عنوان مرکز لای [تجهیز] می‌خوریم.

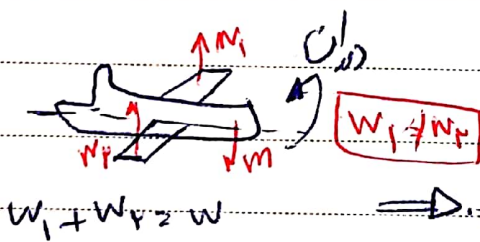
ما در اینجا فقط با جسم صلب کار داریم.

که نیروی لافان است.



ایرلاین شیب + ایرلاین = نیروی در مرکز

$$a_n = \frac{v^2}{R + R_{earth}}$$



① Particle مرجع نقطه:

① مرجع صلب: هر یک از اجزای هواپیما که می‌تواند.



① جسم انعطاف پذیر:



حرکت جسم صلب

$$\vec{v}_x = \vec{v}_G + \vec{r}_x \times \vec{\omega}$$

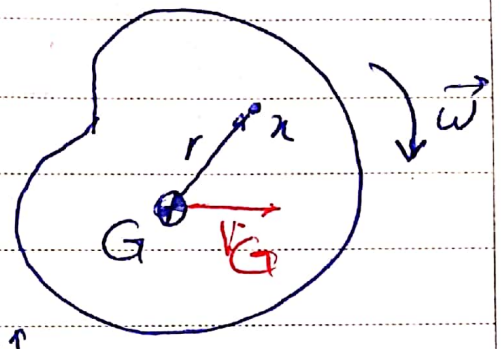
تبدیل مختصات

$$N_G = 0$$

$$\vec{W} = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_i = 0$$



رابطه بین  
نشی نیروهای خارجی

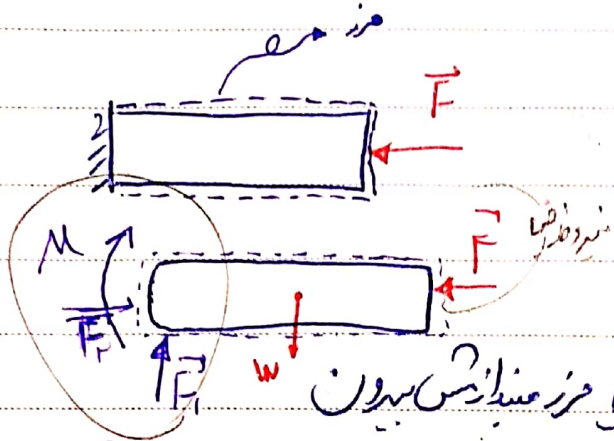
شرط لازم و کافی برای سکون (یا حرکت) جسم صلب

برای تمام نقاط و در هر آنکس میسر نیست.

حلب چلیم

دراسات سیستم چیست؟

سیستم را با یک باب مرز تعریف می شود.

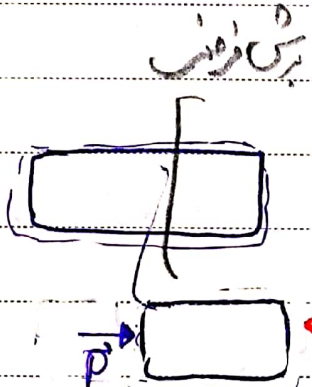


در صورتی که مرز مهمه!

اگر نبود در این مرز تعریف می شود

نیروی خارجی  
داخلی  
فشار

اما ... اثرات محیطی بودن را برای آن اعمال می کنیم (اثرات)



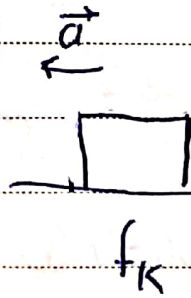
دفعه شدن - دراسات به آن نه می پردازیم

مستویه انتفاقی است مستویه اندازه گیری

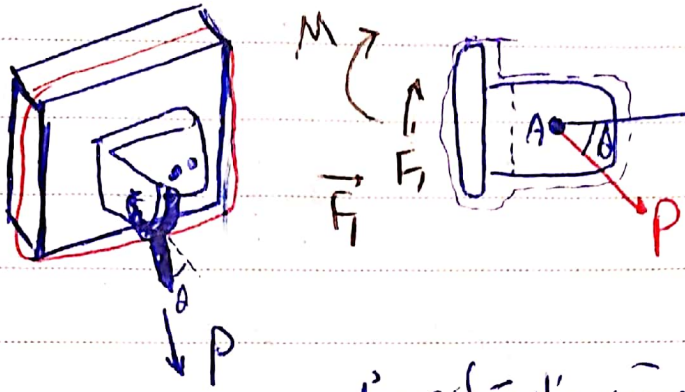
نیروی خارجی - عمل active - در داخل مرز - نیروی داخلی  
عکس العمل Reactive - به نام

عملی (مطلوبه):  $w, F, F, F$

عکس العملی (مطلوبه): اصطلاحات



مطلوبه سیستم را در یک سطح قرار می دهیم  
از عکس العمل سطح به سطح  
سطح زمین



• انتخاب سیستم (مرز) وابسته به خواسته‌های مسئله

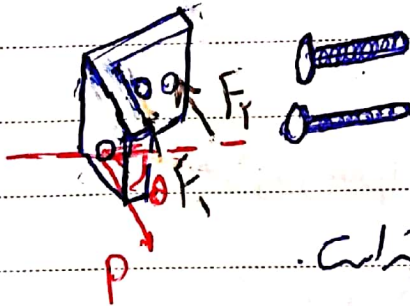
• (فنیکی به دنبال آن هستیم) هست.

• مسئله‌ای که در آن سئون تونی؟ (عنوان)

• مرز سیستم چنانچه سئون را شامل شود.

• در این وزن سبک هیچ به عنوان اثرات داخلی محسوب می‌شوند.

▲ عملی بهیچ



•  $F_r$  برآیند نیروهای Reactive هستند.

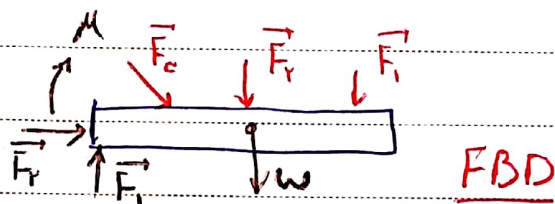
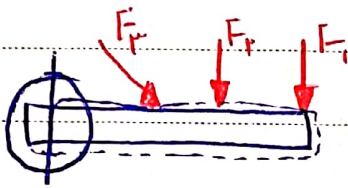
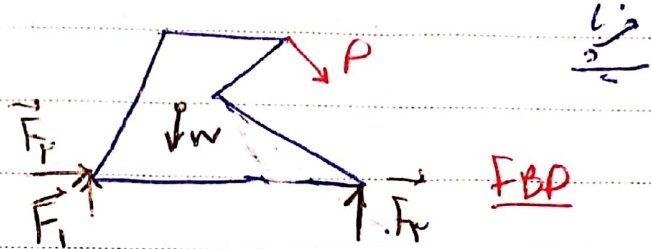
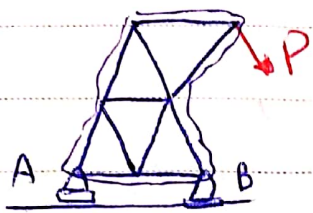
• انتخاب سیستم (مرز سیستم) به نیاز کلی وابسته است.

Free Body Diagram (FBD) مرز بهیچ آزاد فرماندهی سیستم

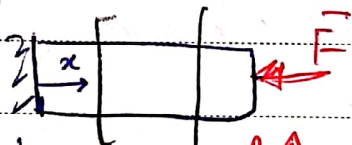
① انتخاب سیستم (ب) تعیین مرزهای سیستم (سی) نیسای در دست  
(external) نیروهای خارجی



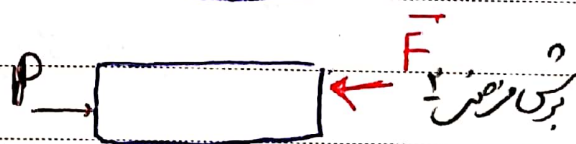
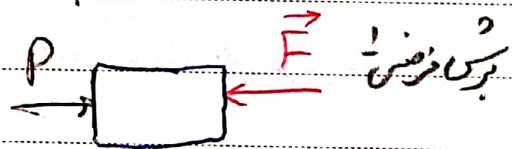
مثال:



پیش فرضها بر روی رید



در حالت نیروی داخلی  
(یک توزیع دانه ثابت است)

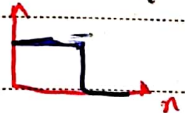


پیش فرضها بر روی

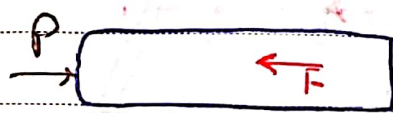


در صورتی است که هیچ نیروی داخلی  
وجود ندارد.

P



در صورتی که توزیع نیروی داخلی داریم.

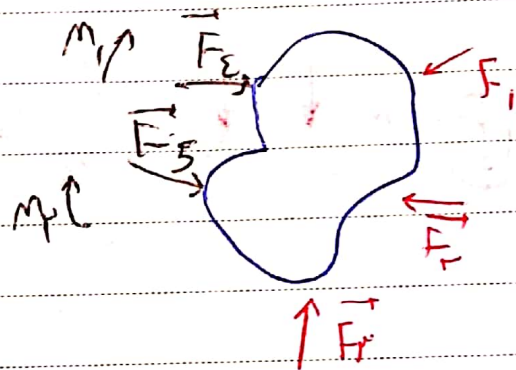


نکته: توزیع نیروی داخلی (مثلاً در اصل صلب) به نقطه اثر نیرو وابسته است.

• سازمان که فقط اثرات خارجی را دارد

باید در یک نیرو به عنوان بردارهای لغزان برقرار داشته باشد

همچنین به دینامیک جسم داریم  
~ ~ ~ توزیع عوارضات سینمایی داخلی داریم



①  $\sum F = 0$

②  $\sum M = 0$

مفقط اثرات خارجی

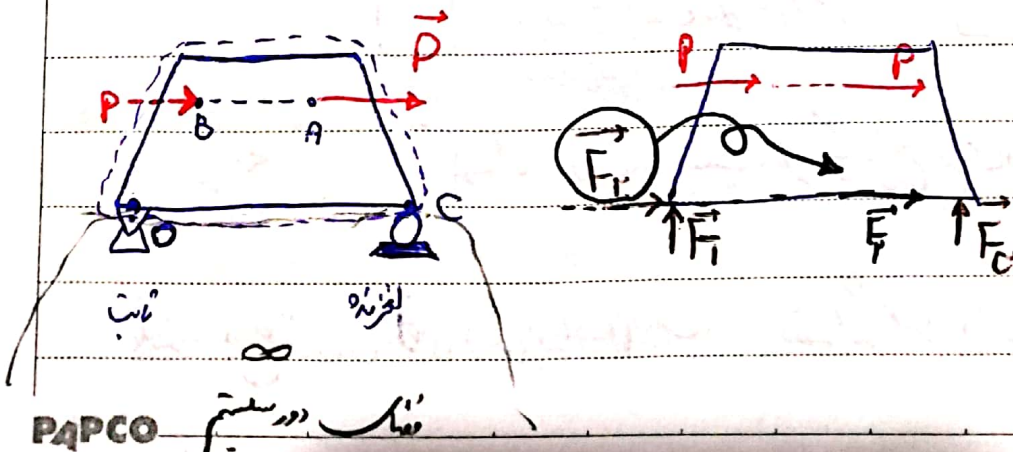
نیست در یک وسیله یک جسم

با حرکت بردارهای خارجی روی خودی خود به تغییر نمی کند

بنابراین:

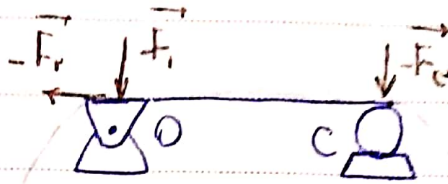
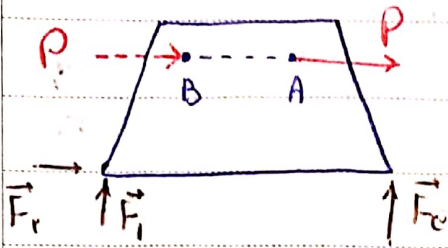
بردارهای کشاوری بردارهای آزاد

**ایمان انتقال:** در واقع همین استفاده از قانون [نیرو بردار لغزان] به دست آمده است.



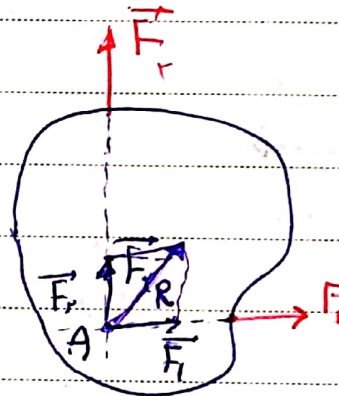
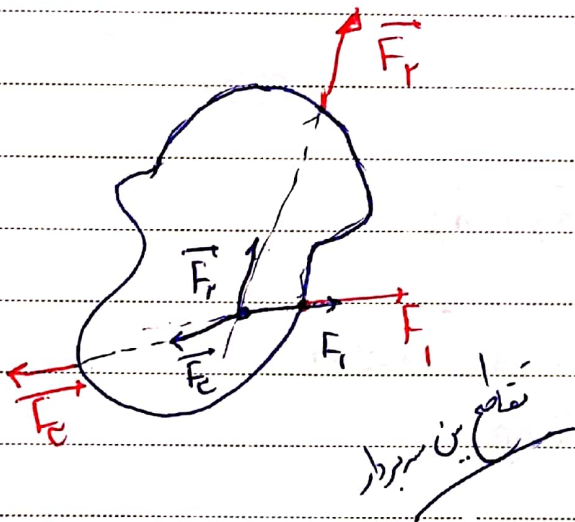


ایستادن سوم نیوتن:

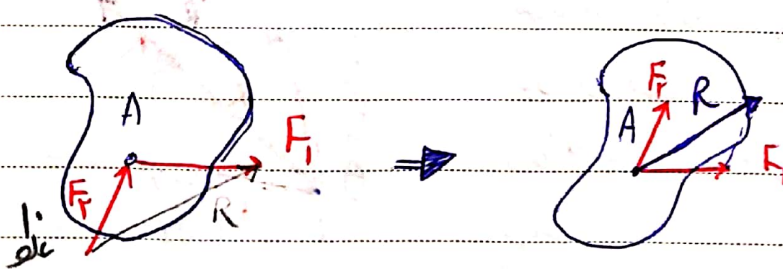


از تحلیل سیستم های مجاوریم و در نظر گرفتن اثرات تعامل نیرویی باید یافتن سوم نیوتن رعایت شود.

Concurrent forces:



Line of action of the resultant force

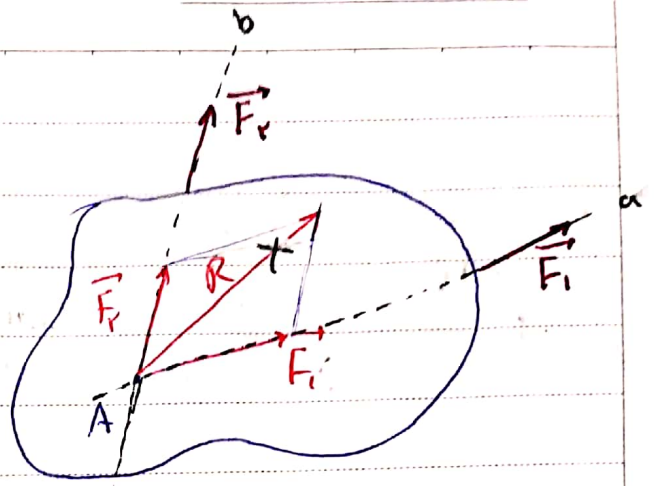
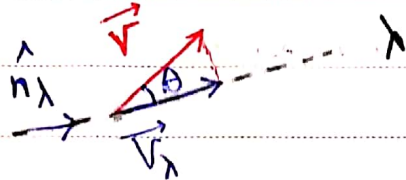


استقرار R باید نقطه A باشد.



A force's component:

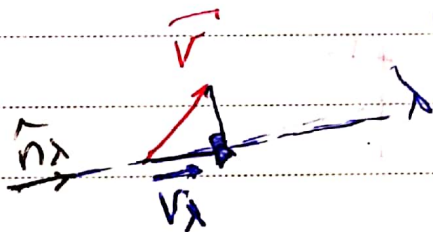
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$$



نموده صریح استنتاج می‌دهد که بردار

باید بردار  $\vec{R}$  را محدود کنیم بر محوری که باید بود

آن مجزیه کنیم



$$\vec{V}_\lambda = (\vec{V} \cdot \hat{n}_\lambda) \hat{n}_\lambda$$

$$\vec{V} \cdot \hat{n}_\lambda = |\vec{V}| \cdot |\hat{n}_\lambda| \cos \theta = V \cos \theta$$

لذا بردار بر این دو بردار، بردارهای خود نیست

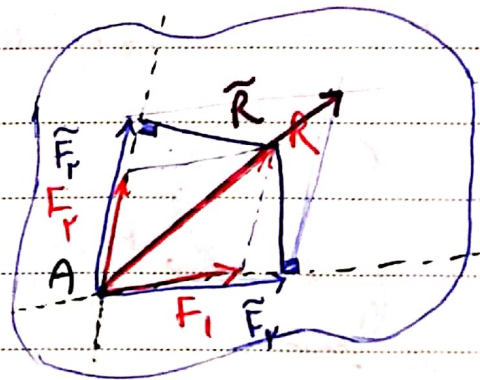
ماده مناسبه بر این دو بردار به صورت متوازی الاضلاع می‌باشد

آن بردار بر این دو بردار را بر این اساس می‌باشد

آن بردار را بردار متفاوت نیستی

P4PCO

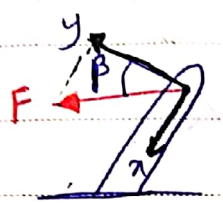
که باید آن متفاوت خواهد بود



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

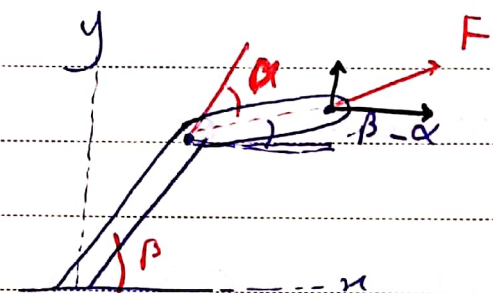
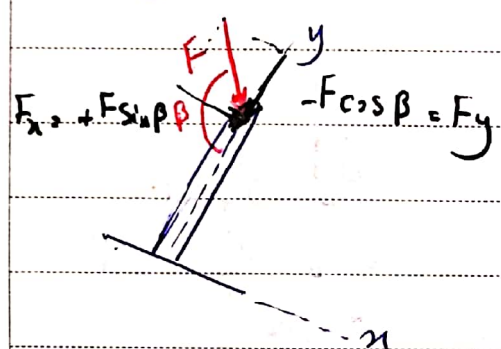
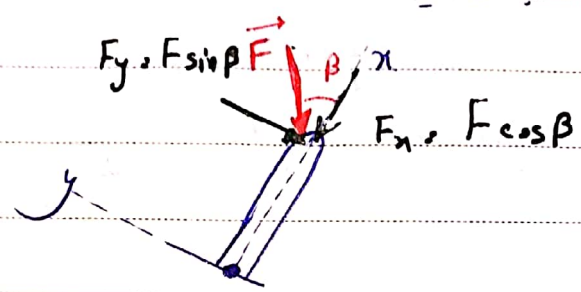
Using a coordinate system to describe a force :

استفاده از مختصات برای نیرو  
(مختصات)



$$F_x = F \sin \beta$$

$$F_y = F \cos \beta$$

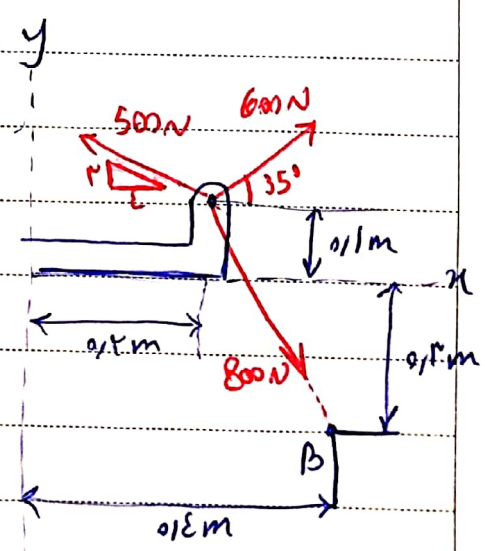


$$F_x = F \cos (\beta - \alpha)$$

$$F_y = F \sin (\beta - \alpha)$$

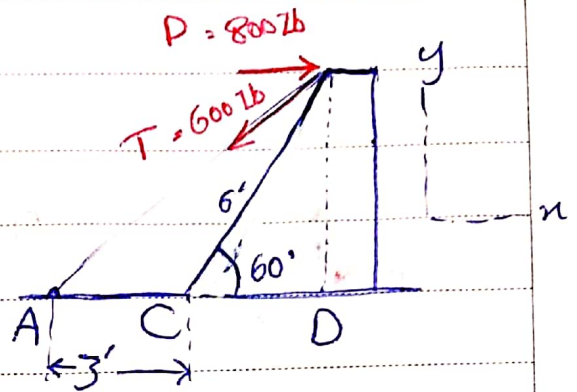
### Sample problem 2/1

The forces  $F_1, F_2, F_3$ , all of which act on point A of the bracket, are specified in three different ways. Determine the x & y scalar components of each of the three forces.



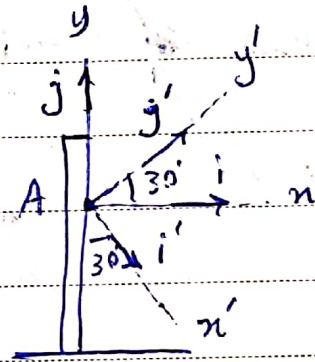
## Sample Problem 212

Combine the two forces  $P$  and  $T$ , which act on the fixed structure at  $B$ , into a single equivalent force  $R$ .



## Sample Problem 213

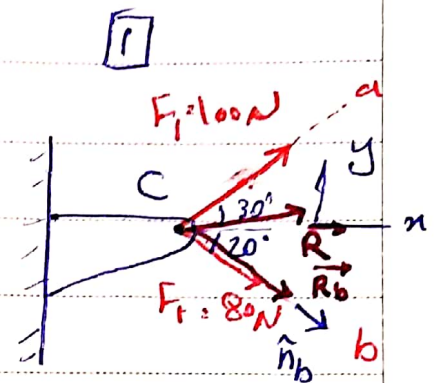
The 500-N force  $F$  is applied to the vertical pole as shown. 1) Write  $F$  in terms of the unit vectors  $i$  and  $j$  and identify both its vector and scalar components. 2) Determine the scalar components of the force vector  $F$  along the  $x'$  and  $y'$  axes. 3) Determine the scalar components of  $F$  along the  $x'$  and  $y'$  axes.





# Sample problem : 2/4

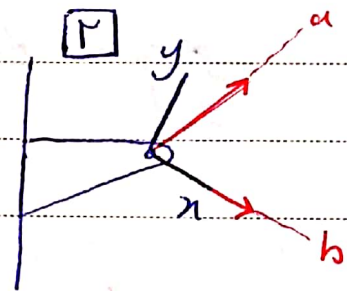
Forces  $F_1$  and  $F_2$  act on the bracket as shown. Determine the projection  $F_b$  of their resultant  $R$  onto the bar's.



$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 100 (\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) \\ \vec{F}_2 &= 80 (\cos 20^\circ \hat{i} - \sin 20^\circ \hat{j}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\hat{i} + \hat{j}$$

$$\hat{n}_b = \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} \rightarrow R_b = (\vec{R} \cdot \hat{n}_b) \hat{n}_b$$

$$R_b = 100 \cos 50^\circ + 80 \text{ N}$$

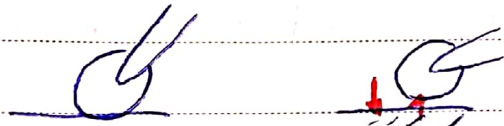


## other force classifications:

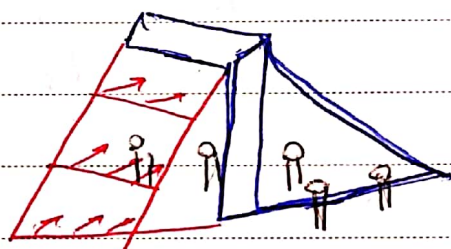
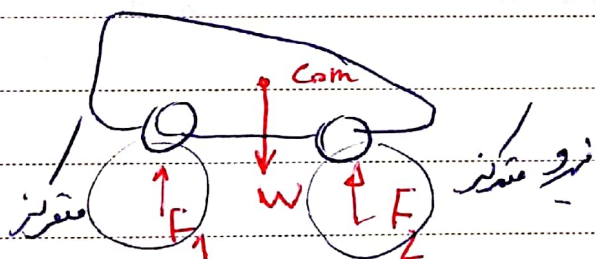
### 1. contact or body forces: (فاسی یا غشی)

نیروهای حجمی (مانند نیروی جاذبه و دهنده هستند)

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$



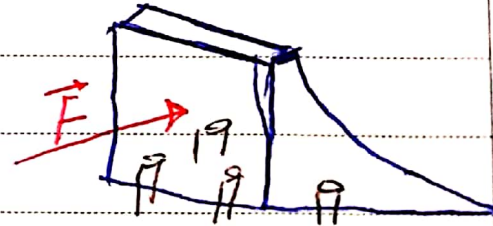
### 2. نیروی کششی و فشاری



نیرو کششی

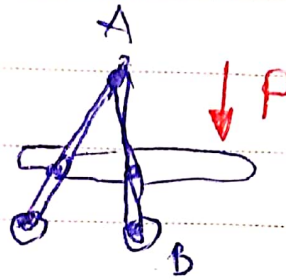
انبار آبی است به سازه ها  
تیرهای آن فرود می شود مایل  
ملاحظه نمایند.

نیروی جاذبه و نیروی کششی  
در انبار سازه در مقابل کل جسم



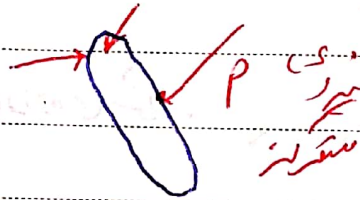
قابل صرف نظر نیست و می توان نیروی کششی را

معمولاً در نظر گرفته می شود.



خواسته ۱: آیا سازه A, B تحمل می‌کند یا نه؟  
 اگر نه است به خصوص در بخش  $P$  است.  
 در بخش  $P$  به خصوص در بخش  $P$  است.

خواسته ۲: آیا سازه A, B تحمل می‌کند یا نه؟  
 اگر نه است به خصوص در بخش  $P$  است.  
 در بخش  $P$  به خصوص در بخش  $P$  است.

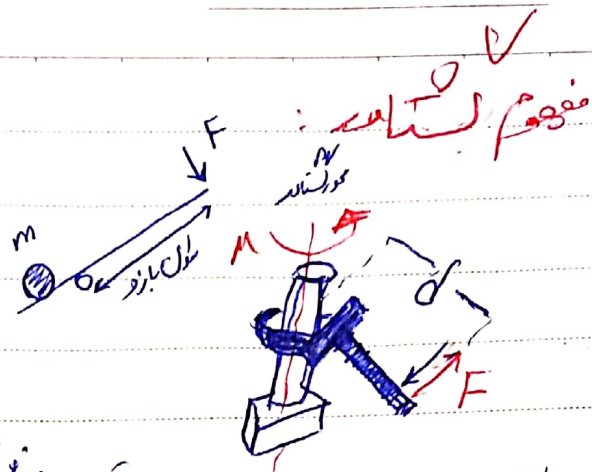




the con

محاسبه توله را می‌توانیم  
 $M = F \cdot d$

① اندازه



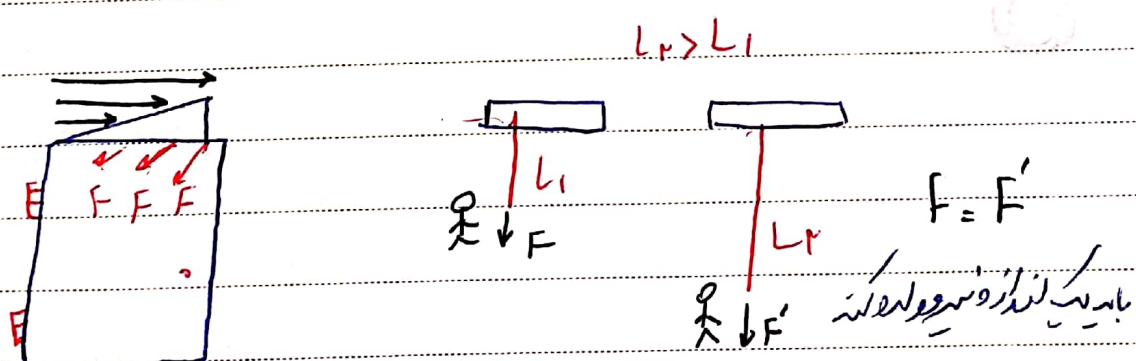
درصد ریزش بیشتر باشد یا با طول دوران استاندارد بیشتر باشد

دیم که استاندارد در مفهوم دوران جسم اختراع شده است. استاندارد سیمی وادی شود جسم با انرژی بیشتری

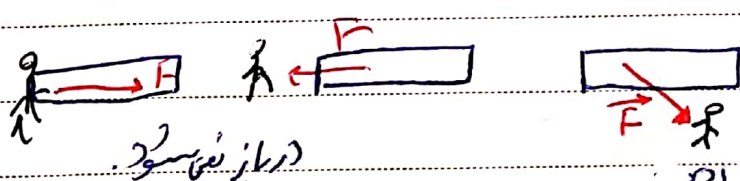
دوران داده می‌شود. ← تعادل حرکت در پیچاندن لوله نیز انرژی شود

① استاندارد حول یک راستا تعریف می‌شود.

② حول این راستا جهت  $\oplus$  یا  $\ominus$  می‌توانیم  $M$  را مقصود کنیم  
 استاندارد جهت برای



میزان استاندارد توله بیشتر باشد  
 به فاصله محور خطا  
 نیروی کشش

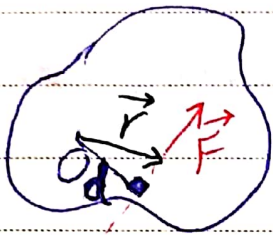


در باز می‌شود

فاصله نیرو تا توله  $\equiv$  استاندارد

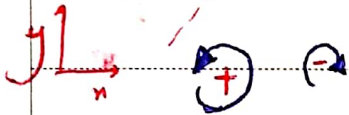
میزان گشتاور تولید شده به فاصله عمودی  $d$  بستگی دارد.

گشتاور (دو بعدی)



① گشتاور حول یک نقطه (محدود) تعریف می شود.

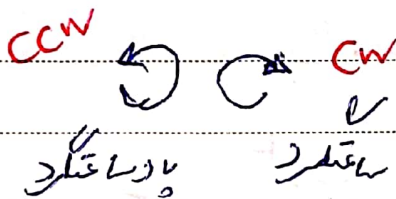
$$\mu = F \cdot d$$



②  $\mu$  می تواند دو جهت داشته باشد. (می توان مثبت یا منفی باشد.)

③ جهت مثبت گشتاور می تواند قرارداد شود. (تا انتهای هر دو برای گشتاور مثبت به هم قرار رهنمود می شوند)

در حالت دو بعدی جهت مثبت گشتاور می تواند دایره عقربه ها باشد.



معمولاً جهت مثبت گشتاور در حالت دو بعدی با ساعتگرد یا پادساعتگرد تعیین می شود.

همواره گشتاور به بردار عمود بر صفحه جهت قرار می گیرد. جهت بردار گشتاور با استفاده از قاعده دست راست تعیین می شود.

۱. جهت مثبت بردار گشتاور به تانژن دست راست است.
۲. در نوشتن  $\mu$  به ترتیب  $r$  و  $F$  توجه کنید.

$$\mu_0 = r \times F$$

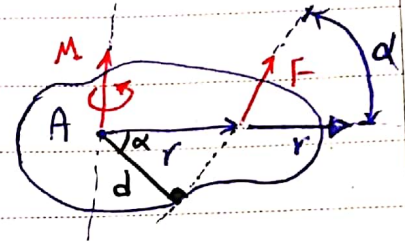
$$F \sin \alpha = F \cdot d$$

دایره عقربه ها



توجه کنید ترتیب  $\vec{r}$  و  $\vec{F}$  در سه فرموله  
سود

⑤ توجه به قانون دست راست



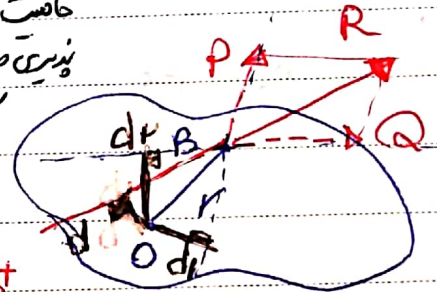
تئور وارینتون

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q})$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$

خاصیت تجزیه  
پیرامونی ضرب خارجی  
روی جمع بردارها

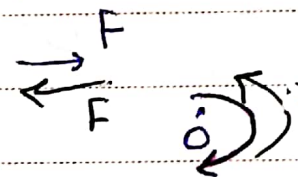


نکته: مقیاس بردار خاصیت تجزیه پیرامونی ضرب خارجی

روی جمع بردارها هم توانسته نتیجه بگیریم که مجموع گشتاور مولفه‌ها

برای  $\vec{P}$  و  $\vec{Q}$  یکسان است.

یک بردار برابر و یکسان در همان بردار است. (گشتاور یک بردار نیز حول این نقطه = مجموع گشتاورها مولفه‌های آن حول همان نقطه)



$$M_O = R \cdot d = -P d_1 + Q d_2$$



پنجره ها :

① دوش سیکاتیسی : استفاده از راه انداز - سرپرست و سفتینگ همای درم

مثال به وسایط : طولانی تر - اتصال استفاده کمتر / در سطح دکارتی ، طایفه تجزیه کنند و تقاطع را ملاحظه کنید.

② روسی هندیس : هیچی را جابه جایی نکنیم . منتها از جابجایی به جابجایی و راه را ملاحظه کنیم بر اساسی

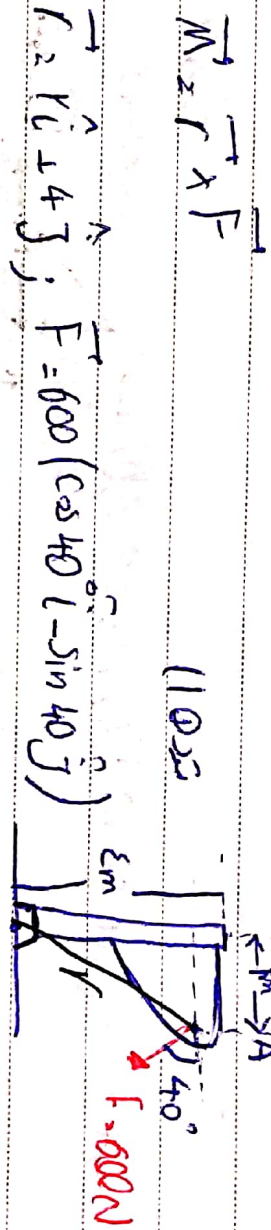
مثال به وسایط : محموله آبره سرچ تر - اتصال استفاده میتری / استفاده می کنیم .

③ روسی

مثال به وسایط :

استفاده میتری / استفاده می کنیم

سپهره او نو تجزیه می کنیم (راه را ملاحظه می کنیم و روشها در راستای می کنیم)



$$\vec{F} = F \cos 40 \hat{i} - F \sin 40 \hat{j}$$

$$\vec{M}_0 = (F \sin 40 \hat{i} - F \cos 40 \hat{j}) \times (x \hat{i} + y \hat{j})$$

$$= -12 \times 386 \times 15 + 4 \times 400 (-1) = -20 \text{ k N.m}$$

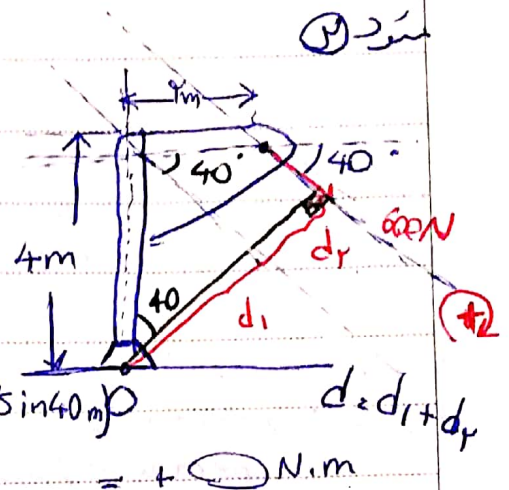
$$M_0 = -20 \text{ k N.m}$$

بسیارانی ز غایت نه از روشین ضرب داخلی استفاده کنیم . جهت مثبت نشانه + و جهت منفی نشانه -

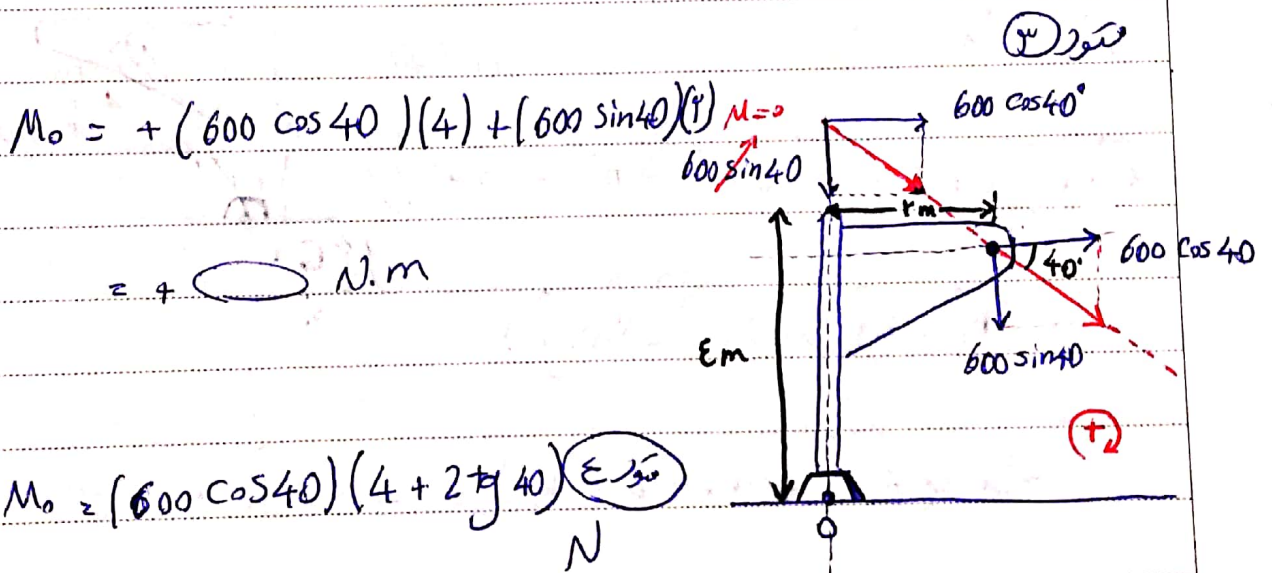
درست بودن (در سطح محاسبات به جهت بهانه و لزوماً جهت مثبت نشانه + و جهت منفی نشانه -)

جهت مثبت به طریقی که محور بر حسب نیست : Papco

د  
جهت مثبت نشو. ددې حالت قبل د مېټر د  
موضع کړو.

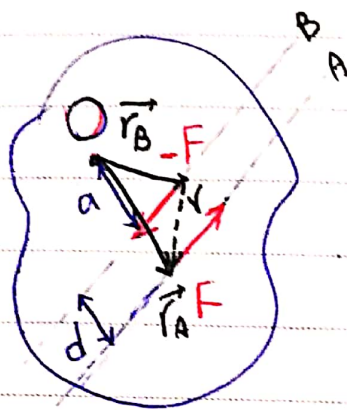


$$d = 4 \cos 40 + 2 \sin 40$$





# The concept of the couple :



بردار مداری (نیرو) قریب

د ثابت است.  $\therefore$   
 $a$  فاصله نقطه‌ای که می‌خواهیم نسبت به دو راس باشد  
 $d$  فاصله بین دو خط موازی

دو نیروی قریب و در یک دو خط موازی مختلف  
 داشته باشیم، حال فرض کنیم نسبت به یک نقطه این دو نیرو را  
 حول یک نقطه و لنویس به نام  $O$  حساب کنیم.

$$M_O = -F \cdot a + F(a+d) = F \cdot d$$

د انتخاب  $O$  هیچ تاثیری نداشته است.  
 $M = F \cdot d$

گوییم  $M = F \cdot d$  یک نسبت و راست حول یک نقطه خاص تعریف شده و مدوله می‌باشد.  
کیهان است.

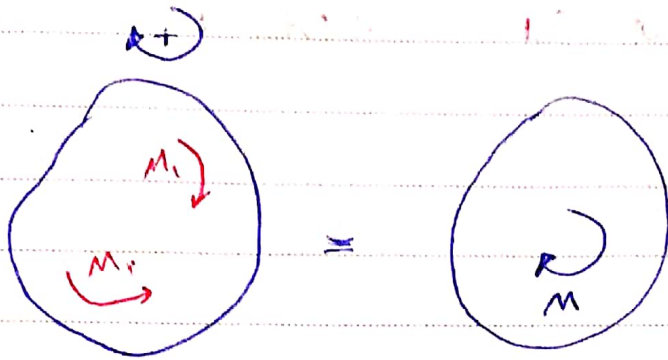
$$\vec{M} = \vec{r}_B \times (-\vec{F}) + \vec{r}_A \times (+\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

که یک بردار اصل بین دو نیرو



طرح مرسوم

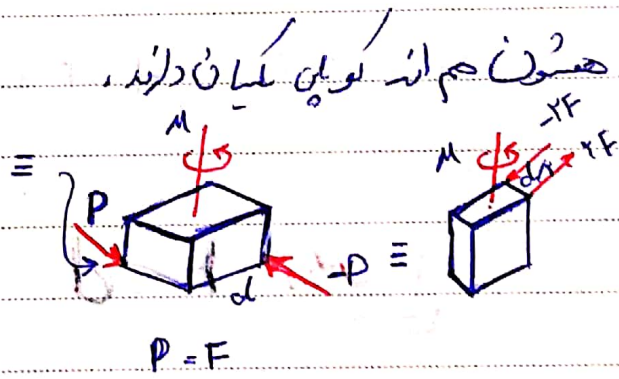
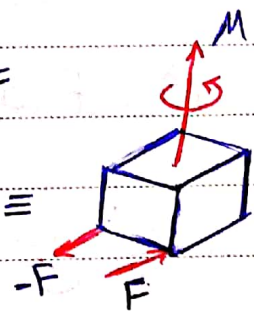
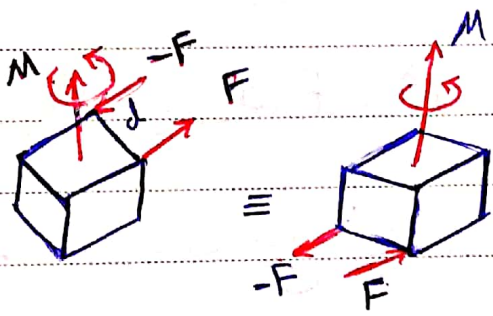


$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

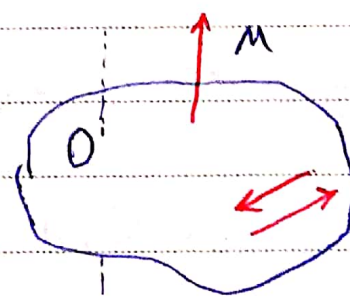
$$M = +M_1 - M_2$$

توی کوپل دیر محدودیت نیست ← سیستمی می توانیم جمع کنیم  
(توی نیرو باید صفاً هم‌جهت را قطع می‌کردند و ...)

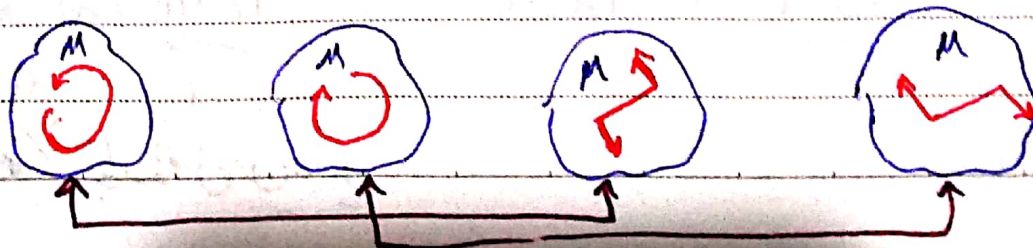
• Think of a couple as a vector in the space even in 2D:



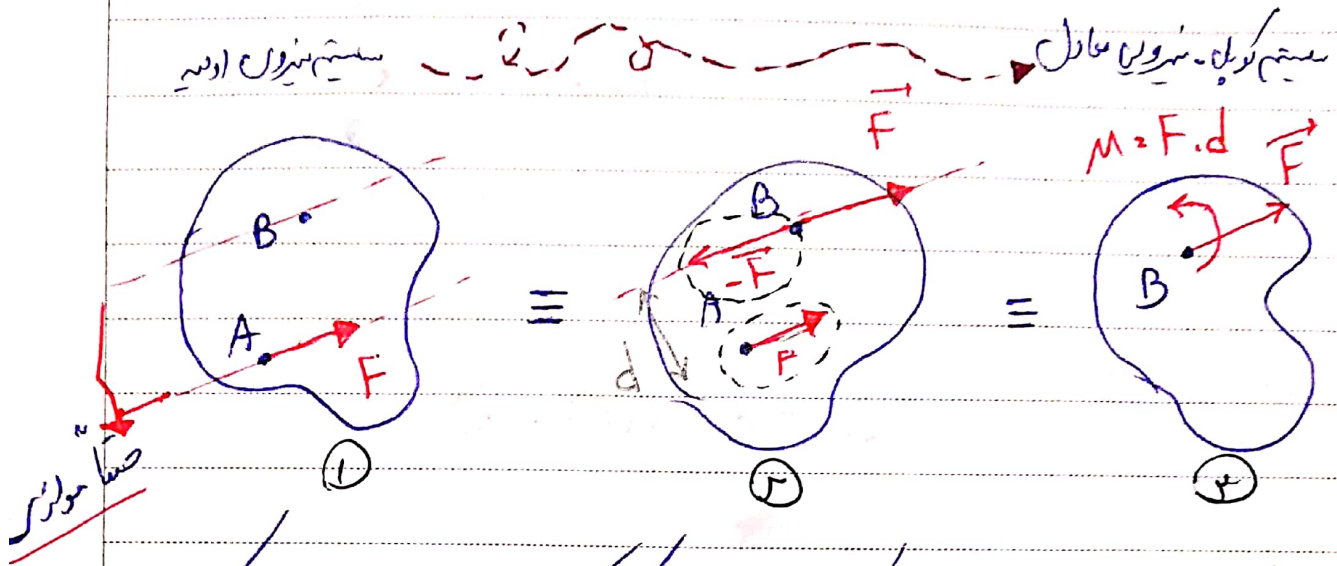
همین هم‌اند کوپل می‌توان دارند



A couple have a sign in accordance positive direction convention



## Force - couple systems:



همان کوپل را ایجاد می کنند که در شکل ① ایجاد می کنند.  $M = F \cdot d$

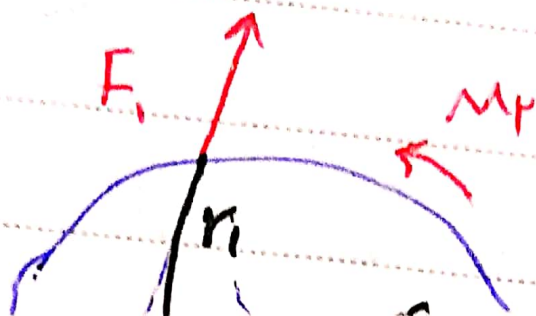
(صفاً تأثیر در انتقال اثر کوپل آن نگاه شود)

تفاوت گشتاور که کوپل و کوپل نیست :

کوپل خاصیت انتقال دارد. انتقال نیرو را انتقال می توانی صدی انتقال دهی و در نظر گرفتن گشتاور ایجاد شده در نقطه جدید.

کوپل نیست ؟

$$\omega = \dot{\theta} = \dot{\phi} = \dot{\psi}$$



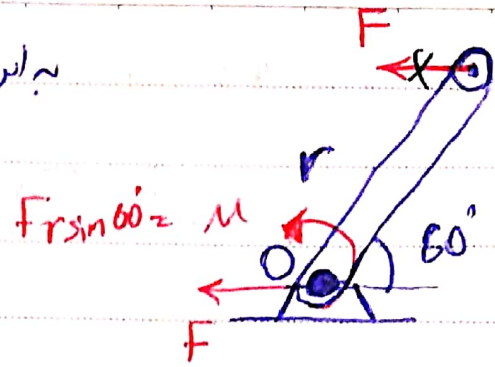
نیروی  $F$  می‌تواند حول نقطه  $O$  دوران تولید کند.  
 حال اگر این نیرو را به نقطه  $O$  انتقال دهیم بدون اینکه  
 اثرات کوپل آن را در نظر بگیریم، دوران که می‌توانست  
 توسط  $\vec{F}$  حول  $O$  تولید شود، حذف می‌شود. لذا اثرات  
 تبارک استاتیکی جسم بهم می‌خورد.

در نتیجه اثرات کوپل معادل حول  $O$  را خودمان باید به سیستم  
 اضافه کنیم.

چون از در نظر گرفتن کوپل  $M$  حال سیستم کوپل نیرو جدید  
 همان اثرات خاصی را در جسم تولید نموده و شرایط استاتیکی را عوض می‌کند.

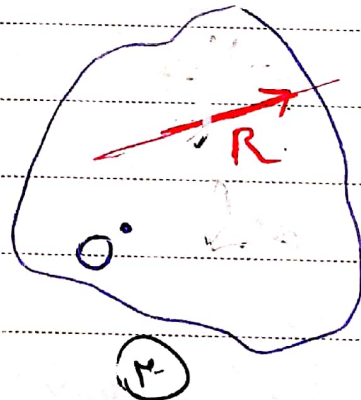
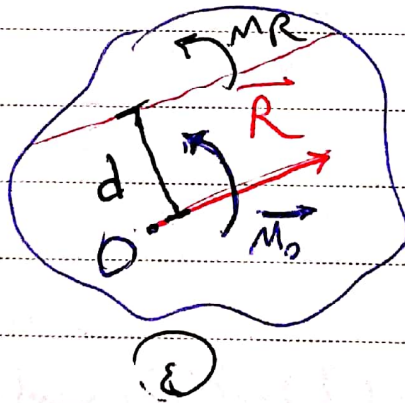
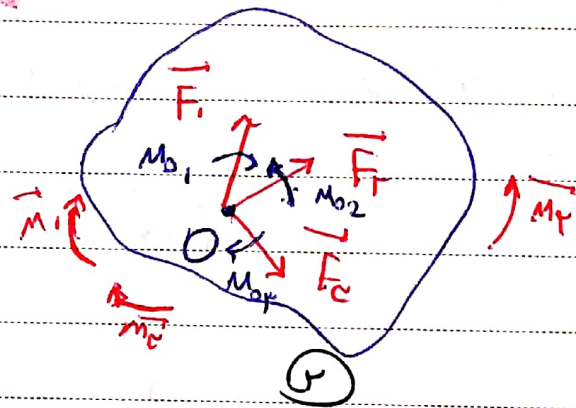
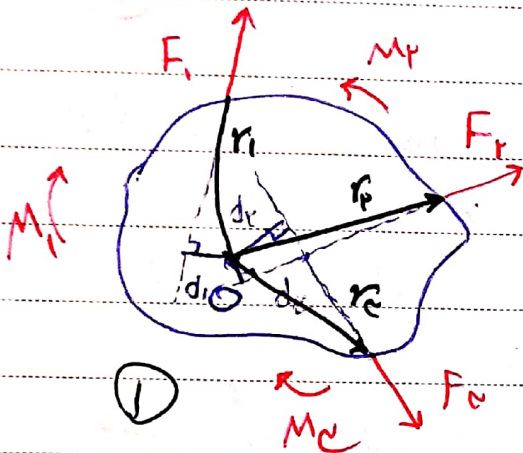


یہ ان کے لئے کہ  $F$  ایک دوسری ہے  
 دوسری خواہش استقلال بدیم جاں بدیم  
 کہہ دے ہیں دوسرے



Resultants :

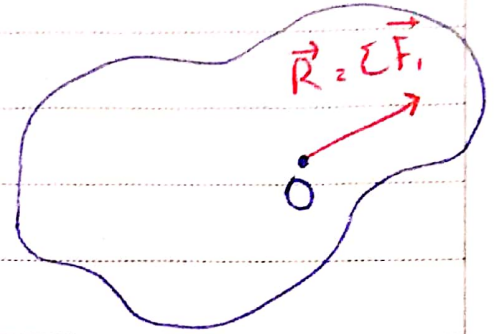
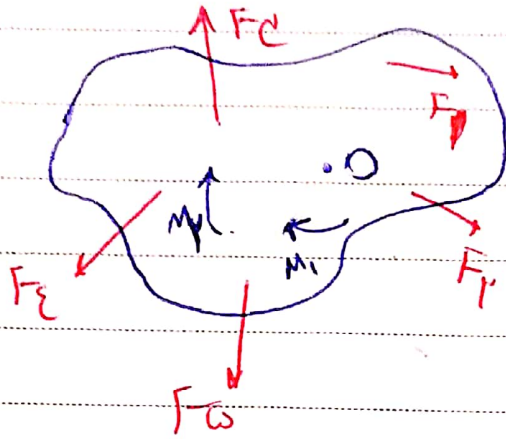
$$\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} = \textcircled{4}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} : \left\{ \begin{aligned} (\vec{M}_O)_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ (\vec{M}_O)_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ (\vec{M}_O)_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \end{aligned} \right. & \textcircled{2} : \vec{R} = \sum \vec{F}_i & \textcircled{3} : M_R - M_O = 0 \\ & M_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i & R \cdot d = M_R = M_O \\ & + \sum \vec{M}_i & \Rightarrow d = M_O / R \end{aligned}$$

Summary :

خلاصه / طالعین :



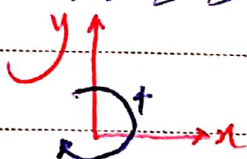
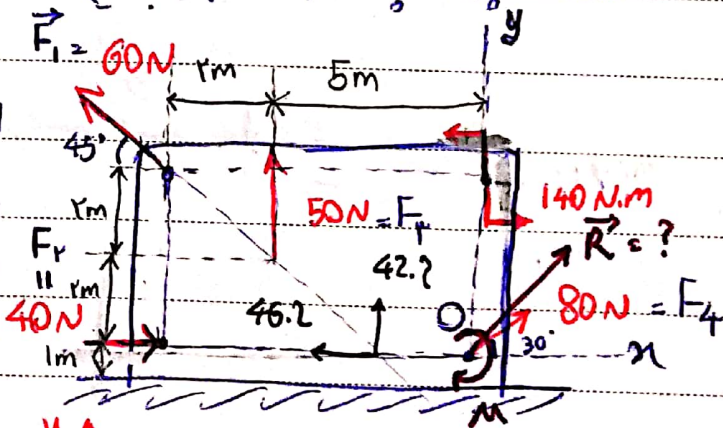
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots$$

$$+ \dots + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots$$

$$R = \Sigma F_i$$

مثال :

سؤال :  $R$  و Couple با بدنه بدست آید ؟



- (۱) تعیین دستگاه مختصات
- (۲) جهت مثبت انتخاب (فرا برداری)
- (۳) نامگذاری نیروی کشش (منفی)
- (۴) همه  $F$  ها را در دستگاه مختصات بریم
- (۵) نامگذاری دستگاه مختصات
- (۶) محاسبه دستگاه مختصات
- (۷) استفاده از قضیه وارثیون
- (۸)

$$\vec{F}_1 = 60 (\cos 45 (-\hat{i}) + \sin 45 (+\hat{j}))$$

$$\vec{F}_r = 40 \hat{i} \text{ N}; \quad F_y = 50 \hat{j} \text{ N}$$

$$F_4 = 80 \text{ N} (\cos 30^\circ \hat{i} + \sin \hat{j})$$

$$R = \vec{F}_1 + \vec{F}_r + \vec{F}_y + \vec{F}_e = \hat{i} + \hat{j}$$

$$M_1 = 42.2 \times 3 = 127.3 \approx 130 \text{ N.m}$$

$$M_y = 0; \quad M_e = 50 \times 5 = +250 \text{ N.m}$$

$$M_4 = 0 \quad (\text{الزخم صفر})$$

$$M = M_1 + M_y + M_e + M_4 = 140 = \boxed{\phantom{000}} \text{ N.m}$$

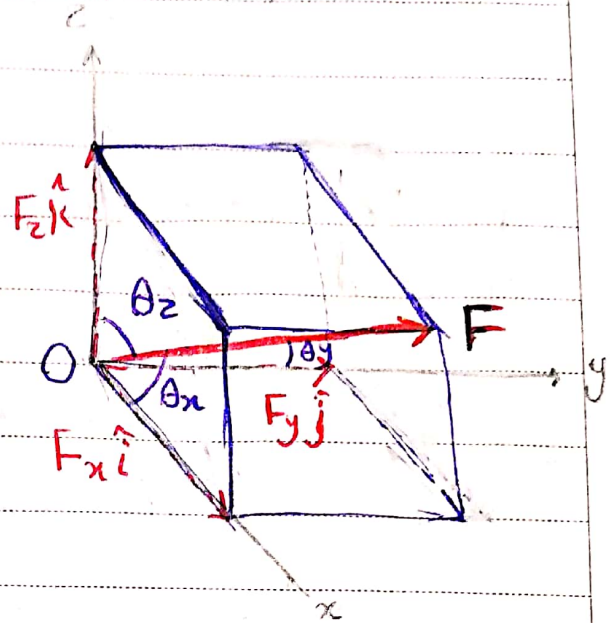
كوبل خارج له صجبه له صجبه باسند تامل جمع كفن طينه  
كوبل نيو نيلو



## Forces in 3D:

$$\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$\begin{cases} F_x = |\mathbf{F}| \cos \theta_x \\ F_y = |\mathbf{F}| \cos \theta_y \\ F_z = |\mathbf{F}| \cos \theta_z \end{cases}$$

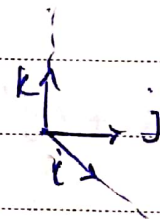


$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (*)$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (**)$$

$$\hat{n}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$$

$\frac{\text{Force}}{\text{Magnitude of Force}}$

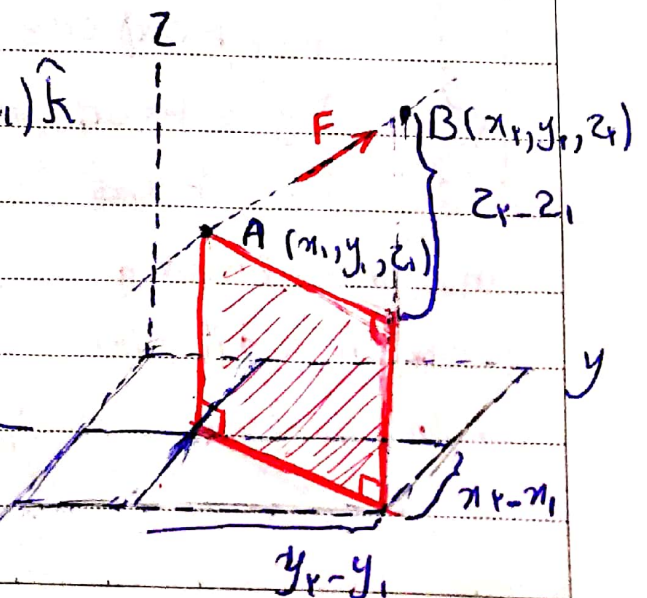


Specifying a force by two points on its LOA:

$$\overrightarrow{AB} = (x_r - x_i) \hat{i} + (y_r - y_i) \hat{j} + (z_r - z_i) \hat{k}$$

$$\hat{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} =$$

$$= \frac{(x_r - x_i) \hat{i} + (y_r - y_i) \hat{j} + (z_r - z_i) \hat{k}}{\sqrt{(x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 + (z_r - z_i)^2}}$$



$$\vec{F} = F \hat{n} = F \frac{(x_r - x_i) \hat{i} + (y_r - y_i) \hat{j} + (z_r - z_i) \hat{k}}{\sqrt{(x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 + (z_r - z_i)^2}}$$

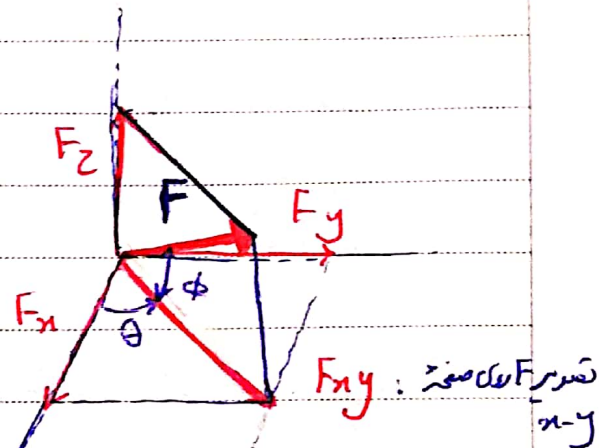
Specifying a force by two angle showing the direction of its LOA:

سؤال: صرف تصور از اندازه یک بردار، **است** آن در  
فضا با چند پارامتر قابل بیان است؟

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \rightarrow$$

$n_x$  و  $n_y$  و  $n_z$  مستقل از هم نیستند. **فقط دو تا از این متغیر مستقلند.**



$$F_{xy} = F \cos \phi \quad ; \quad F \sin \phi = F_z$$

$$F_x = F_{xy} \cos \theta \quad ; \quad F_y = F_{xy} \sin \theta$$

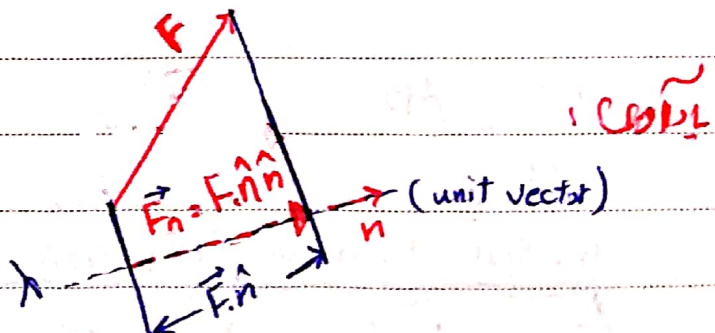
یک راستا در فضای 3D  
با 2 پارامتر قابل بیان  
است.

$$F_x = F \cos \phi \cos \theta$$

$$F_y = F \cos \phi \sin \theta$$

$$F_z = F \sin \phi$$

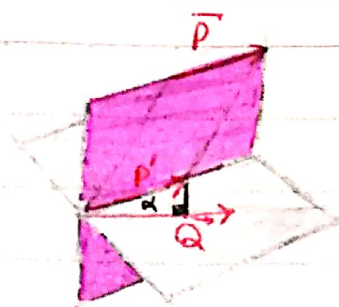
The projection of a  
vector on a direction  
in the space:





The angle between two vectors:

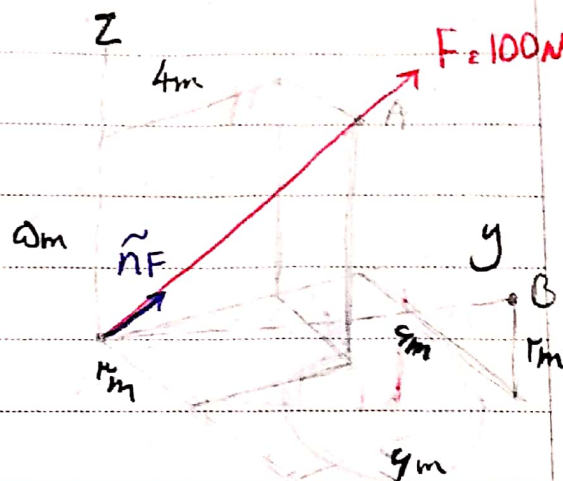
$$\cos \alpha = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{P \cdot Q}$$



$\vec{F} = ? ; \vec{F}_{xy} = ? ; \vec{F}_{OB} = ?$

$$\hat{n}_F = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}}{\sqrt{9+16+144}} \leftarrow$$

$$= 0.42\hat{i} + 0.56\hat{j} + 0.71\hat{k}$$



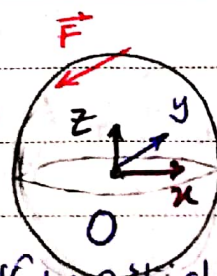
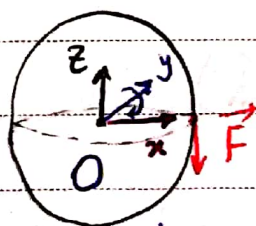
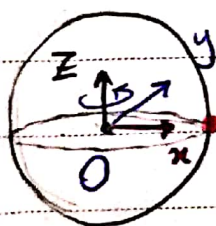
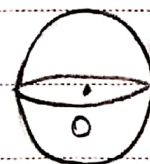
$$\vec{F} = 100\text{N} \cdot \vec{n}_F = (42\hat{i} + 56\hat{j} + 71\hat{k})\text{N}$$

$$F_{xy} = 42\hat{i} + 56\hat{j} \Rightarrow F_{xy} = \sqrt{42^2 + 56^2} = 70\text{N}$$

$$F_{xy} = 100 \cos \phi = 100 \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{149}} \approx 71\text{N} \rightarrow \text{خطای گرد کردن}$$

$$\hat{n}_{OB} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \frac{6\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{36+36+16}} \approx \vec{F}_{OB} = \vec{F} \cdot \hat{n}_{OB} = \dots$$

The concept of the momentum in 3D:



خطای گرد کردن

خطای گرد کردن

خطای گرد کردن



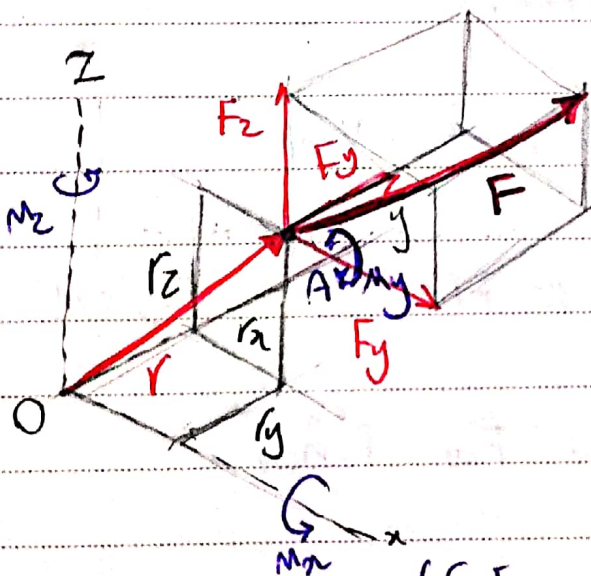
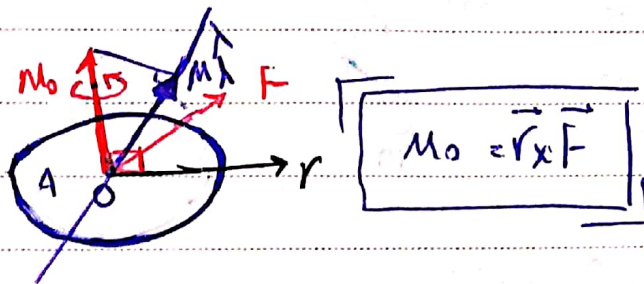
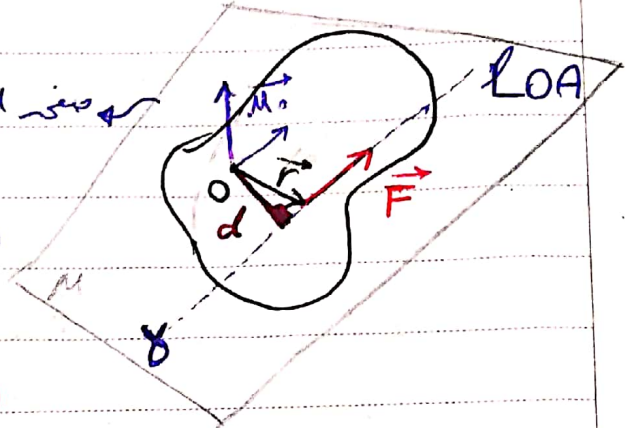
نتیجه (معمولاً) در سه صورتی که نیرو حول یک نقطه و یک راستای خاص باشد.  $M_o$

در صفحه  $M$  شامل LOA و نقطه  $O$  است.

برای سه صورتی که  $M$  در صفحه  $O$  می‌باشد.

① اندازه:  $M_o = F \cdot d$

② جهت: قاعده دست راست



$$M_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

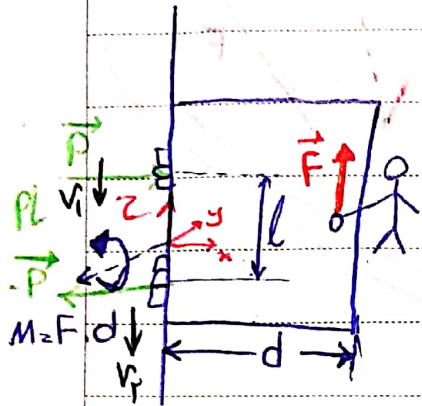
$$= \begin{pmatrix} (r_y F_z - r_z F_y) \hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{k} \end{pmatrix}$$

$$(r_y F_z - r_z F_y) \hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{k}$$

$$+ r_z F_x \hat{j} + r_y F_x (-\hat{k})$$

let us get intuition about the components of a momentum vector :

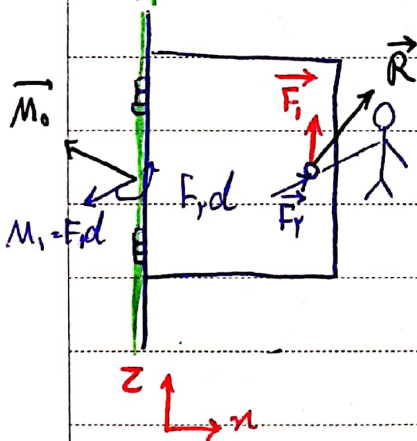
سؤال : آیا می‌توانیم که فرایمانی که به دست می‌دهد را به دست آوریم ؟



$$v_1 + v_2 = F$$

$$PL = Fd$$

حال خواصیم به زبان ریاضی شرح کنیم که چگونه  
تولید شده می‌تواند در اینجا بخواند.



$$F_2 < F_1$$

لولا دوران در حول  $\hat{k}$  معین کند و غیر این  
محور حول محور دیگری نمی‌تواند دوران کند.

\* در ب به دلیل لولاهای فقط در راستای  $\hat{k}$  می‌تواند بچرخد.

\*  $M$  تولید شده نمی‌تواند در اینجا بخواند.

لولا تولید شده از  $F_1$  نمی‌تواند در ب حول لولای بخواند

\*  $M_0$  حول  $\lambda$  (  $M\lambda$  ) می‌تواند بخواند.

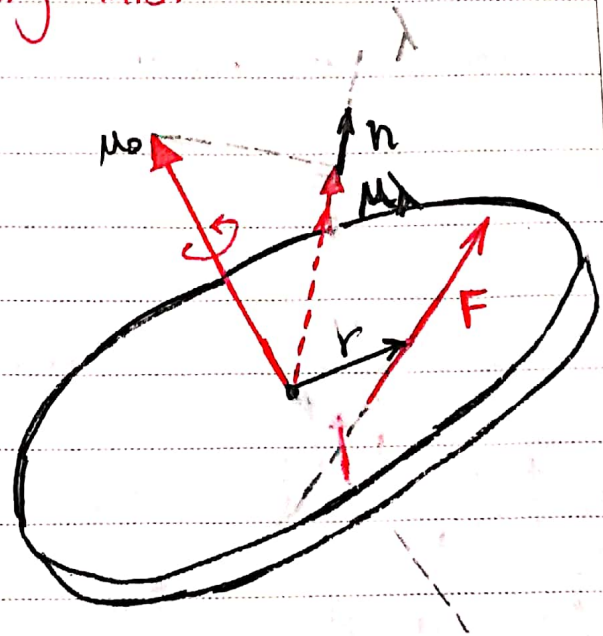
Moment about an arbitrary axis:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_\lambda = M_\lambda \hat{n}$$

میب بهمانه  
میب متلا

$$M_\lambda = \vec{M}_O \cdot \hat{n} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$$



نویس  $M_\lambda$  می تواند در راستای  $\lambda$  باشد یا در خلاف آن. (از دو طرف در راستای  $\lambda$ )

$\hat{n}$  = بردار یک در راستای  $\lambda$

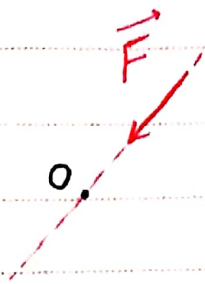
$M_\lambda$  = شتابی که حول نقطه O و در راستای  $\lambda$  می شود.

$F$  = نیرویی که به بدن وارد می شود.

$$\rightarrow M_\lambda = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



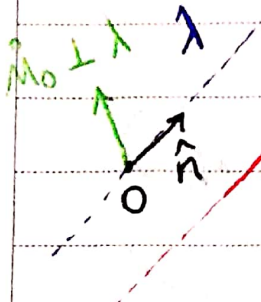
حالت خاص ۱: اگر LOA یک نیرو از یک نقطه بلند.



$$\vec{M}_O = 0$$

نیروی گذرنده از یک نقطه می تواند حول آن نقطه

شمار تولید کند.



حالت خاص ۲: اگر LOA یک نیرو موازی راستی  $\lambda$  گذرنده از یک نقطه باشد.

نیروی که موازی یک محور خاص است، توانایی ایجاد شمار حول

$$M_\lambda = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = 0$$

A, B و C

میانگین  $M_\lambda = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$  ؟

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$$

$$\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \rightarrow \text{مستقل خطی نیست}$$

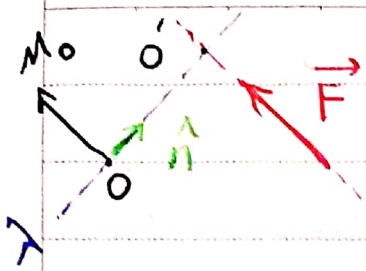
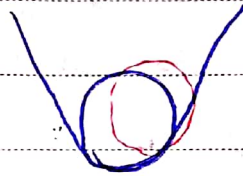
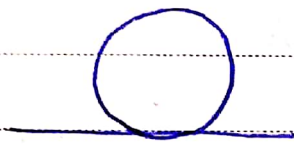
لحظه حجم متوازی السطوح  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  صفر است.

نکته: شمار F حول O صفر نیست.

مولفه آن حول  $\lambda$  صفر است.

حالت خاص ۳: اگر  $\vec{F}$  راستای  $\lambda$  نهد از یک نقطه قطع کند.

$M_\lambda = (\vec{r}_\lambda \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$

تقابل بین پایداری و ناپایداری

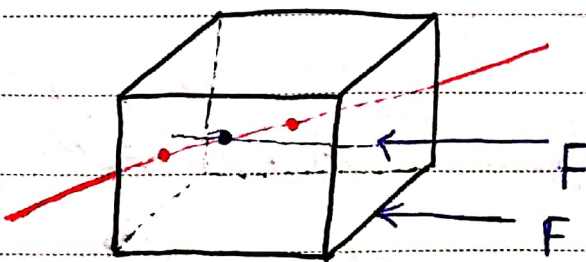
تقابل پایداری و ناپایداری

تقابل ناپایداری و پایداری

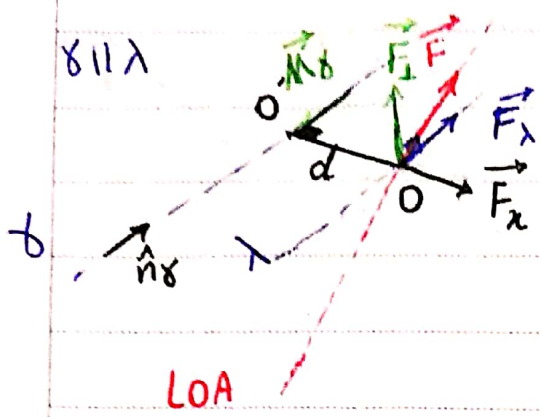
همواره عمل غیر ایمن در سازه و محاسبات است. اگر یکی از طرفین تغییر به حالت اولی میسر می شود.

نکته: به نکته اصلی و شیب راجع کنید. در این حالت نیز نیروی  $F$  روی نقاط روی  $\lambda$

(بدون نقطه  $O$ ) می توانست وارد شود.  $M_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$



شماره یک نیروی دور یک محول (موتور) : <sup>امکان دارد</sup>



توضیح : LOA ،  $\lambda$  در خط متافرنه

$\lambda$  و  $\theta$  با هم سوازی اند.

اگر  $\vec{F}$  به مولفه های  $\vec{F}_x$  ،  $\vec{F}_y$  ،  $\vec{F}_z$  تجزیه می کنیم.

$\vec{F}_x = \vec{F} \cos \theta$  مولفه هم راستا  $\theta$  (مقاطع با  $\theta$ )

$$\vec{M}_\theta = \vec{F}^\perp \cdot d \hat{n}_\theta$$

$\vec{F}_y = \vec{F} \sin \theta$  مولفه موازی محور  $\theta$

$\vec{F}_z = \vec{F}$  مولفه  $\vec{F}$  در راستای محور  $\lambda$  و  $X$



مطلب مهم (بجای صحت)

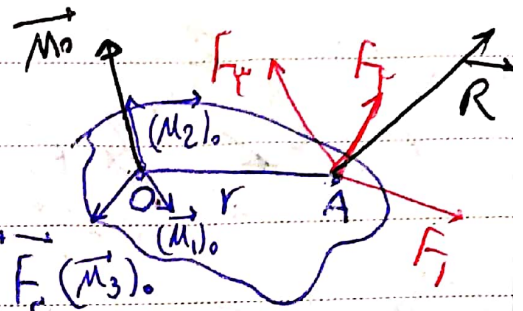
Varignon's theorem in 3D:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} \xrightarrow{\text{خاصیت ضرب خارجی}} \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 \quad (\vec{M}_3)_O$$

$$= (\vec{M}_1)_O + (\vec{M}_2)_O + (\vec{M}_3)_O$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$



The concept of the couple in 3D:

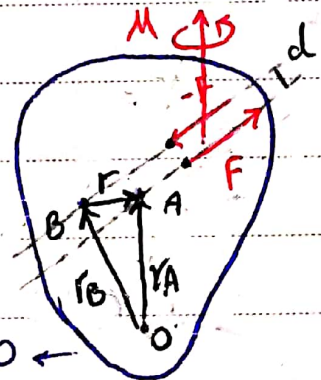
$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

A و B دو نقطه دلخواه و F و -F دو نیروی مخالف

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

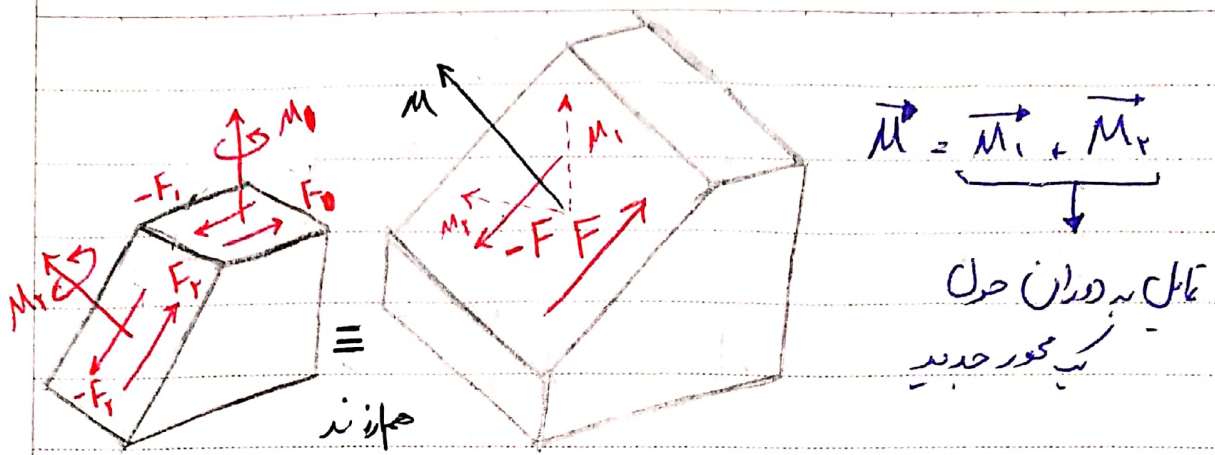
$$M_A = F \cdot d$$

0، یعنی کمالات دلخواه است.

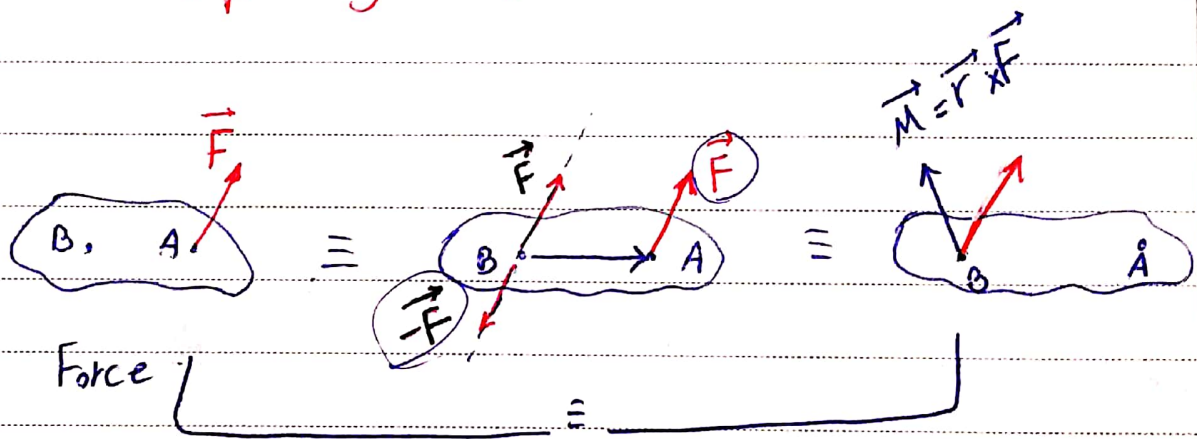


بردار گشتاور، بردار در راستای بردار دایره ← نیروی به اندازگی

(در توانیم در هم ضرب کنیم به دست)



## Force - Couple system in 3D

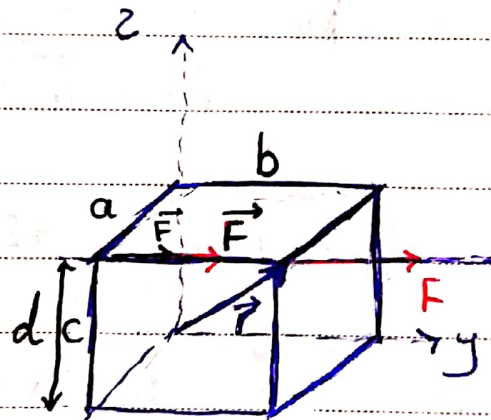


## Example :

$$\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$$\vec{F} = F\hat{j}$$

$$M_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix}$$



نمودار استاتیکی نسبت به این بردارها در این شکل

جواب ثانياً =  $-Fc\hat{i} + 0\hat{j} + Fa\hat{k}$

method II.

$$\vec{M}_O = -Fc\hat{i} + 0\hat{j} + Fa\hat{k}$$

method I

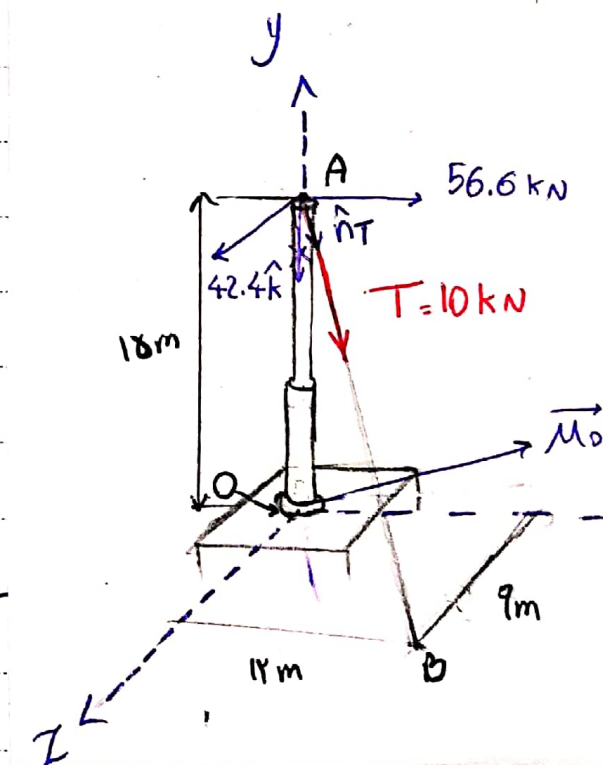
$$\vec{T} = 10 \text{ kN } \hat{n}_T = 10 \text{ kN } \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

$$T = 10 \text{ kN} = \frac{(11-0)\hat{i} + (9-0)\hat{j} + (0-18)\hat{k}}{\sqrt{11^2 + 9^2 + 18^2}}$$

$$(56.6\hat{i} + 70.7\hat{j} + 42.4\hat{k}) \text{ kN}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{T} = 15\hat{j} \times \vec{T} = 15\hat{j} \times (56.6\hat{i} + 70.7\hat{j} + 42.4\hat{k})$$

$$= 15 \times 56.6 (-\hat{k}) + 15 \times 42.4 \hat{i}$$





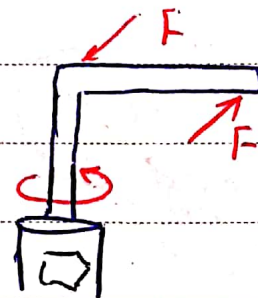
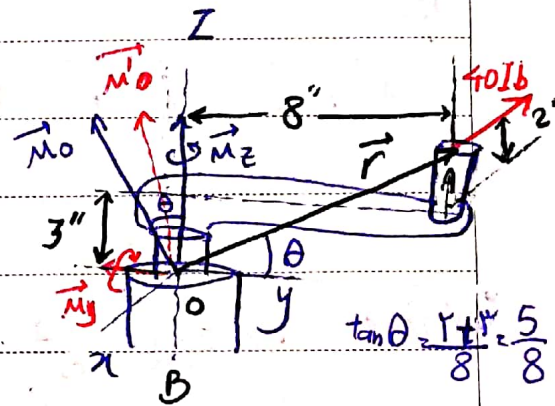
## method II

$$\vec{M}_0 = 42.4 \times 15 \hat{i} + 56.6 \times 15 (-\hat{k})$$

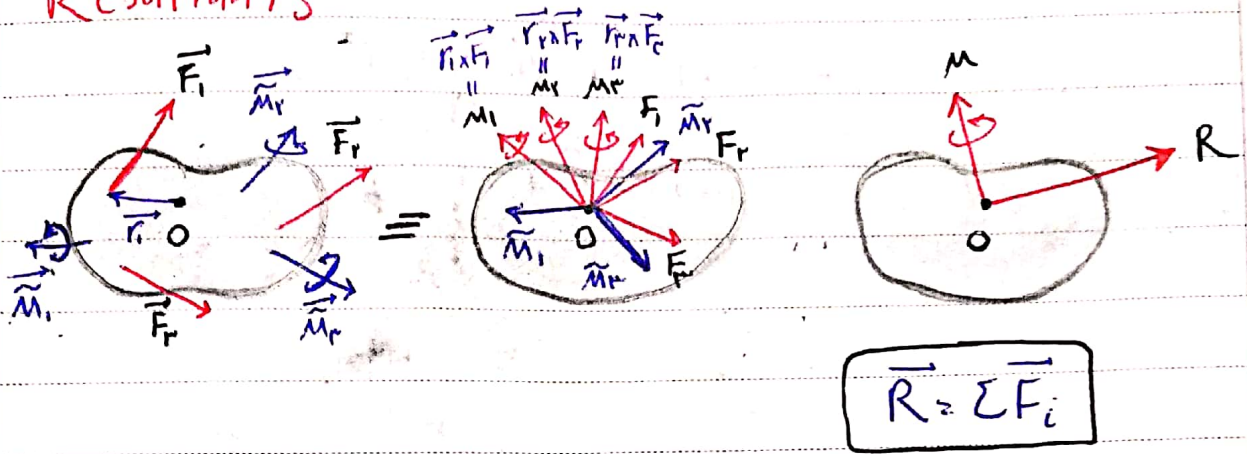
$$\vec{M}_O = (8\hat{j} + 5\hat{k}) \times 40(-\hat{i})$$

$$= 320 \hat{k} - 200 \hat{j} \quad \text{lb.in}$$

$$M_0 = \sqrt{r_{00}^2 + r_{01}^2} \quad \text{I bin}$$

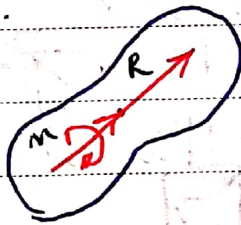


## Resultants

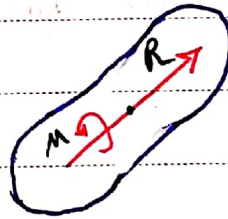


$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

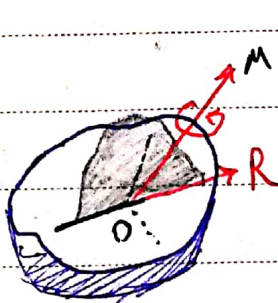
The concept of wrench resultant:



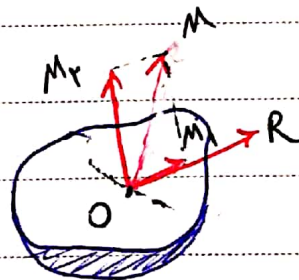
Positive wrench



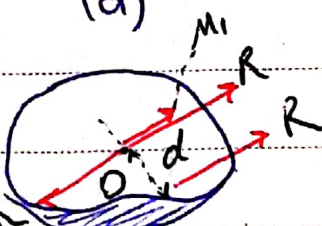
Negative wrench



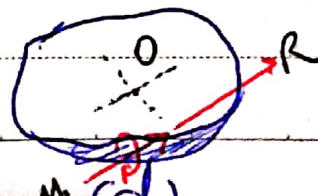
(a)



(b)



(c)



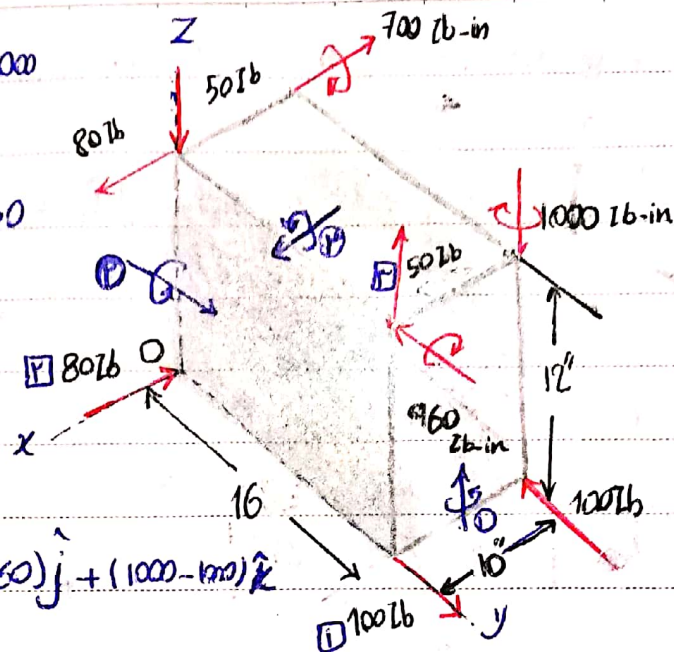


$F \cdot d$  = گشتاور نیرو  $F$  به اندازه  $d$

①  $\Rightarrow$  ایما در ی  $① \quad 10 \times 100 = 1000$

②  $\Rightarrow$  ایما در ی  $② \quad 12 \times 80 = 960$

③  $\Rightarrow$  ایما در ی  $③ \quad 50 \times 16 = 800$



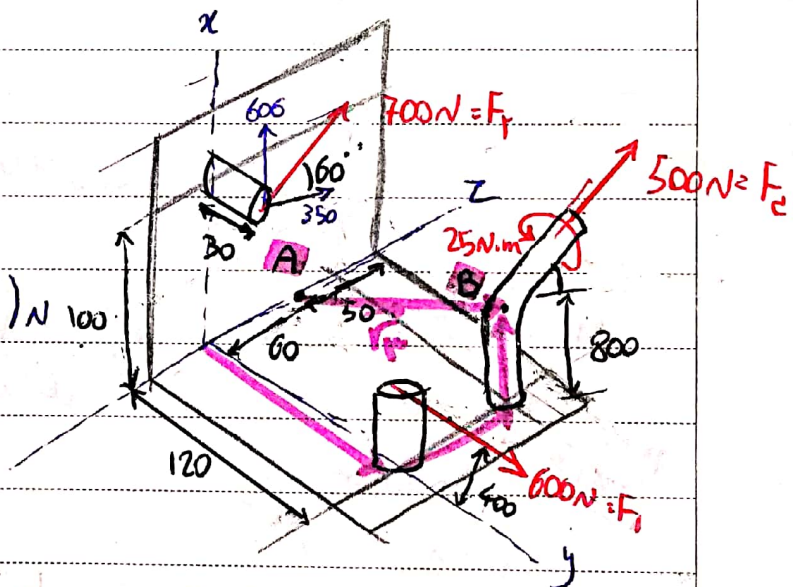
$$\vec{M} = (800 - 700)\hat{i} + (960 - 960)\hat{j} + (1000 - 1000)\hat{k}$$

$$= (100)\hat{i}$$

$\vec{F}_1 = 600 \hat{j} \text{ N}$  ;

$\vec{F}_2 = 700 (\cos 60^\circ \hat{k} + \sin 60^\circ \hat{i}) \text{ N}$

$\Rightarrow \vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$



$R_x = 321 + 606 = 927 \text{ N}$

$R_y = 600 + 271 = 871 \text{ N}$

$R_z = 271 + 350 = 621 \text{ N}$

$\vec{M}_1 = (600 \text{ N} + 0.06) \hat{i} +$   
 $(600 \times 0.104) \hat{j}$

$\vec{M}_1 = (36 \hat{i} + 24 \hat{k}) \text{ N.m}$

\*  $F_2$  را به دو بخش موازی با یکدیگر درآوریم  
 یکی را به سمت راست (مثبت) و دیگری را به سمت چپ (منفی)  
 راستی هر دو تقریباً برابر است. با توجه به آن را  
 بپذیریم.  
 ۱. جهت مثبت بپذیریم.  
 ۲. سپس بر روی محور وضع نقطه‌ایستیم.  
 ۳. صفر را محور را به سمت چپ قرار دهیم.  
 می‌باشد.

فقط به دو جهت با محور



$$\vec{M}_r = -606 \times 0.03 \hat{k} - 606 \times 0.06 \hat{j} - 350 \times 0.1 \hat{j} + 350 \times 0.03 \hat{i}$$

$$\vec{r}_r = 0.12 \hat{j} + (0.06 + 0.05) \hat{k} + 0.08 \hat{i}$$

$$M_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.08 & 0.12 & 0.11 \\ 321 & 271 & 271 \end{vmatrix} =$$

کا دو تا متو در مع

۱. مکی استا هله صاب خاص  $\vec{F} \times \vec{r}$

۲. مکی استا هله مکتبه مولفه مکی سرانک اول و

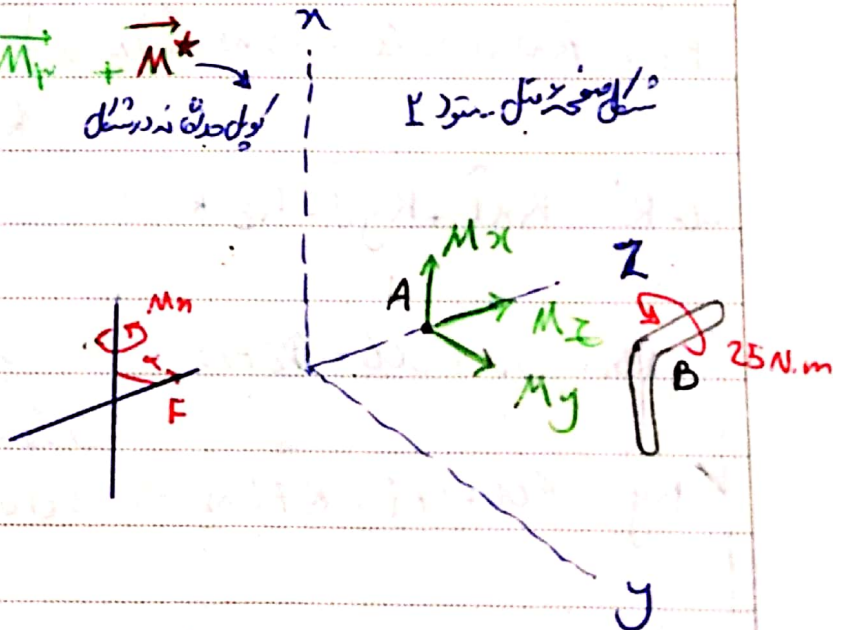
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_r \rightarrow \vec{M}_r + \vec{M}^*$$

مکتبه مکتبه در مکتبه

مکتبه مکتبه مکتبه

$$\vec{M}^* = (25 \text{ N.m}) \hat{n}_3$$

$$= 20(\dots)$$



## Equilibrium condition:

①  $\vec{R} = 0$

یا آوردن: برپای شوط تعادل در یک

②  $\sum \vec{M} = 0$

جدا کردن: سیستم از نقطه صدمت می شود.

آن را برپای داریم، متوجه می شویم که از تعادل خارج می شود.

برپای داریم را برپای داریم  $\rightarrow$  تفاوت و نیروی اثر دایره ای

## System isolation:

① انتخاب سیستم (مثلاً مسئله و نظایر)

② بدست آوردن (مضغ کردن) صمغ دایره سیستم

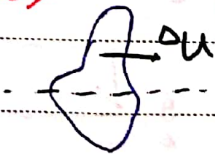
③ رسم در نظر گرفتن تمام نیروهای خاص (اعم از علمی و علمی)

④ بدست آوردن دانش لازم برای تشخیص صمغ اثرات عظیم است

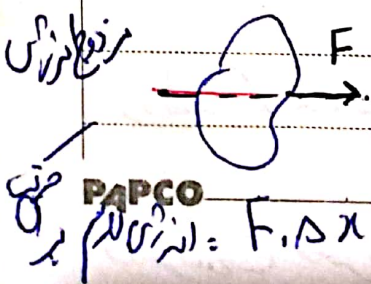
## Modeling the action of Forces:

مختص  $\rightarrow$

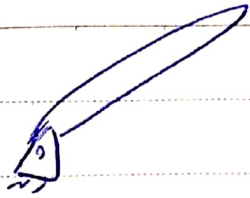
مختص  $\rightarrow$



مزدوج اثری: حرکت یک نیروی دایره



اثره نام بر  $M \cdot \Delta \theta$  (مختص)



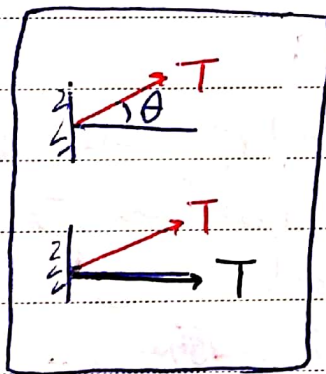
پیچ طول درشت‌نویس را بردار.

در شبیه‌سازی صانع هدف هر جا که یک بوی از حرکت متدینه / حرکت قطعی و هوایی

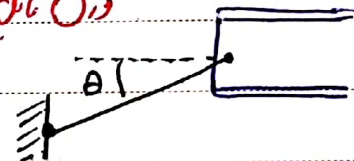
(لرزشاً) مزوج انژی متناظر با آن (سبز / آبی) روی سیستم عملی کند تا

قدیم مورد نظر ایجاد شود.

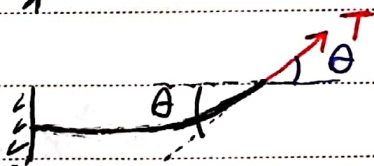
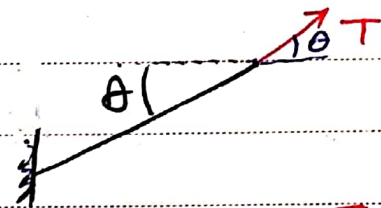
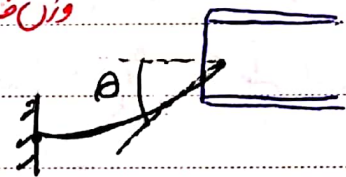
1. Flexible cable, belt, Action on Body to Be Isolated chain, orrap



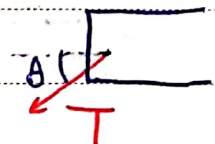
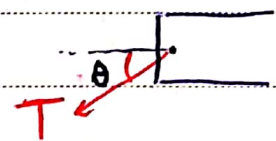
وزن قابل صرف نظر



وزن قابل ملاحظه



باید جوابان به عبارت  
قانون سوم نیوتن  
باشد.

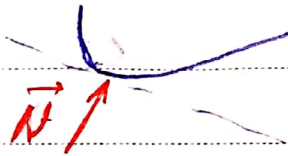
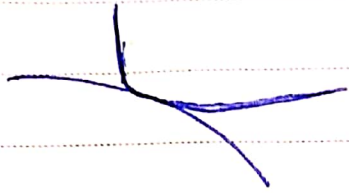


فرد صفت یک سیستم است. چون وزن دارد. نباید در نظر بگیریم.

در هر صورت وقتی که خواهم T محاسب را بگذارم، آنرا صفت را به هم می‌زنم و می‌توانم آن را برای شبیه‌سازی



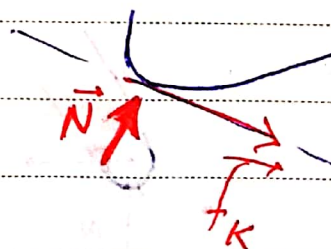
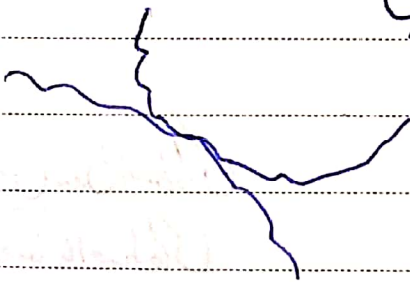
## 2. Smooth Surfaces



هر جا حرکت می داریم باید به سطح عمود آن را بنویسیم.

## 3. Rough Surfaces :

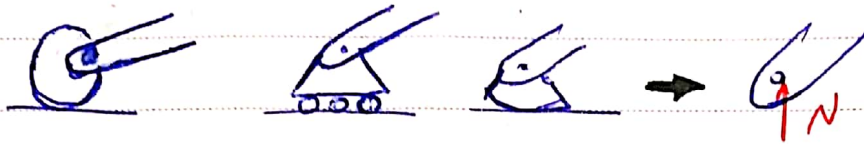
چون جهت  $f_s$  را باید مشخص کنیم و در طول مسطح به سمت  
می آید، کیفیت برای آن فرض می کنیم. اگر مقدار  $f_s$  جهت



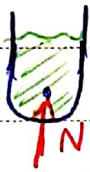
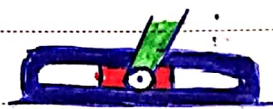
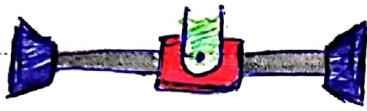
فرض درست است.  
در غیر این صورت جهت  
 $f_s$  اصلاح می کنیم.

لزوم قاعده هندسه نیست، اگر نیروی هم چنان باشد. (مقاومت صبر برابر حرکت.)

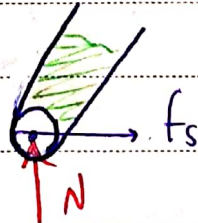
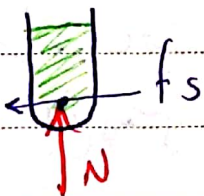
#### 4. Roller support:



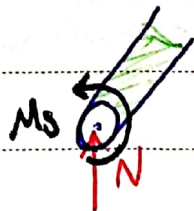
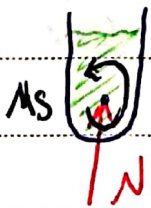
#### 5. Freely sliding guide:



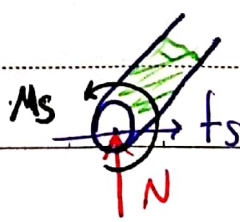
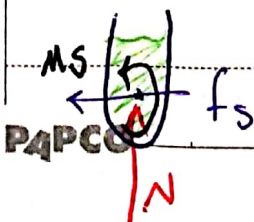
① بین و راحتا بدو ایاں



② بین بدو اصطفااں  
راحتا با اصطفااں



③ راحتا بدو اصطفااں  
بین با اصطفااں



④ هم لین با اصطفااں هم راحتا

P4PCO

## 6. Pin connection



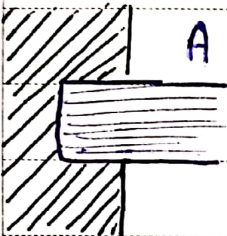
frictionless



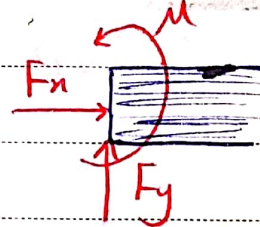
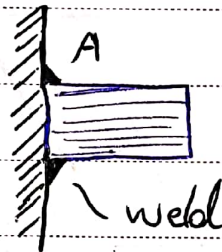
with friction



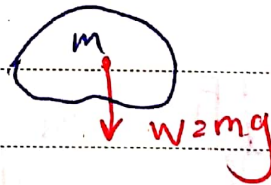
## 7. Built-in or fixed support



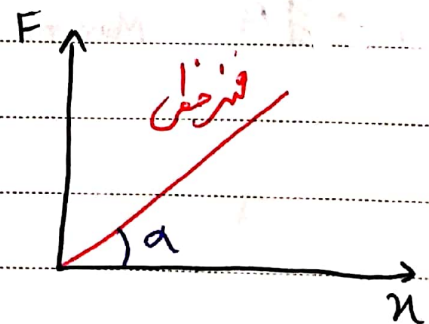
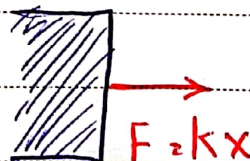
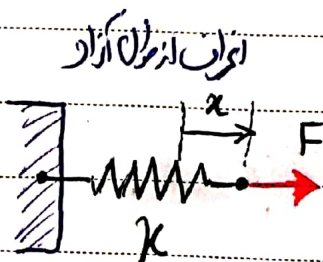
or



## 8. Gravitational attraction



## 9. Spring action

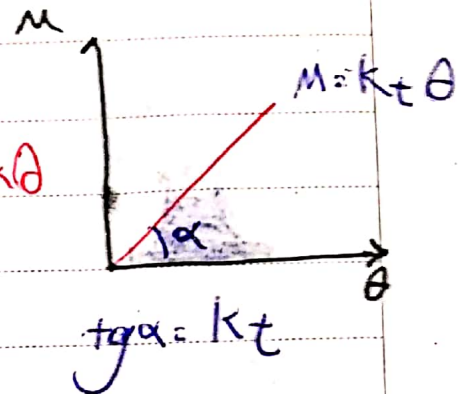
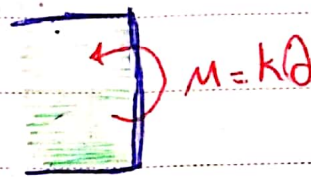
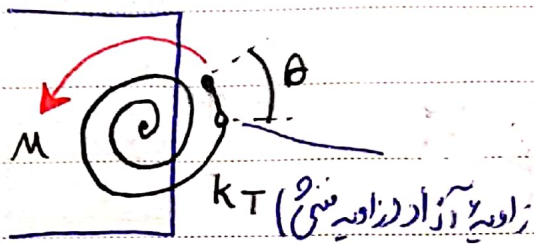


$$F = kx$$

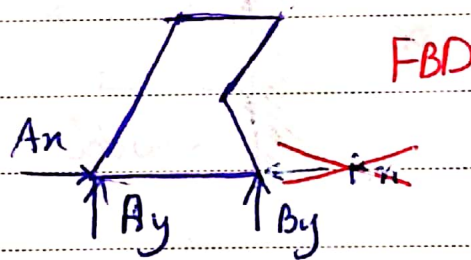
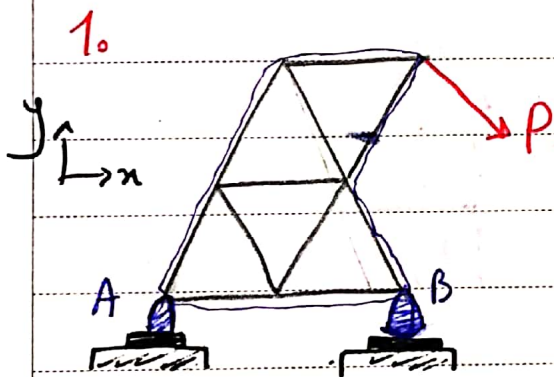
$$k = \frac{F}{x} \leftarrow \text{نسبت}$$



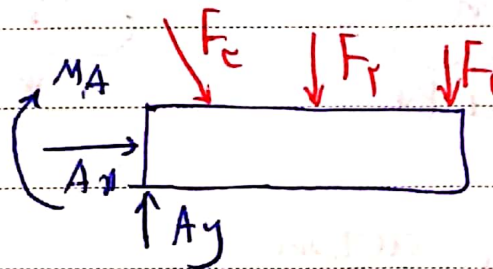
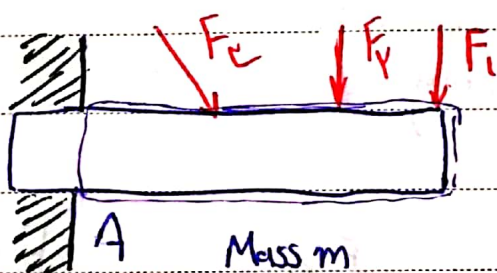
## 10. Torsional spring action:



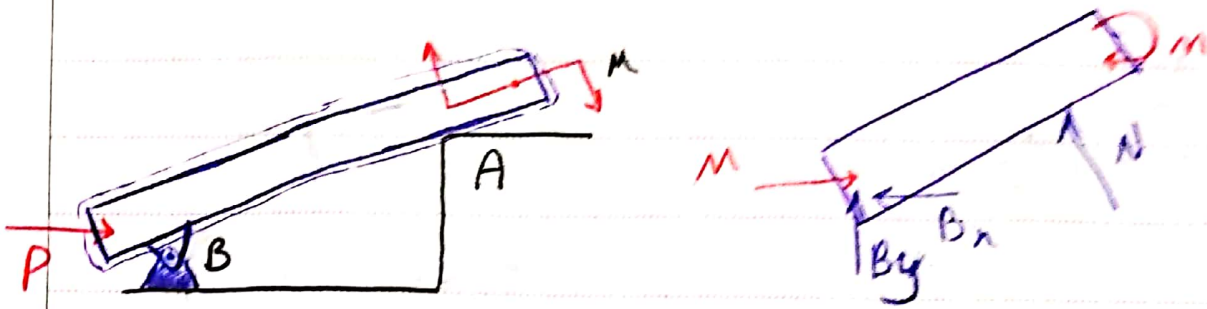
چند مثال از اینزوله کردن سیم



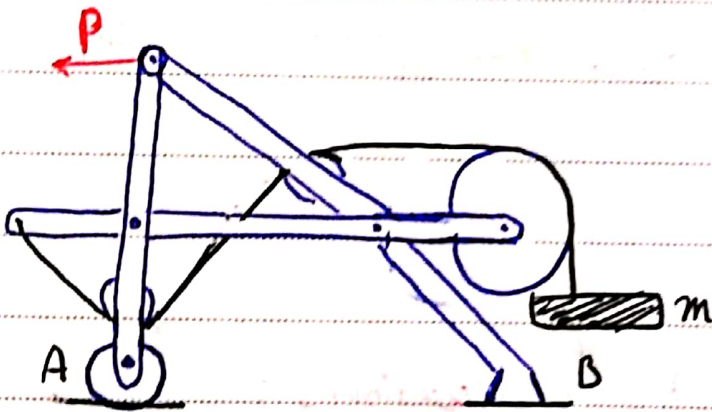
2.



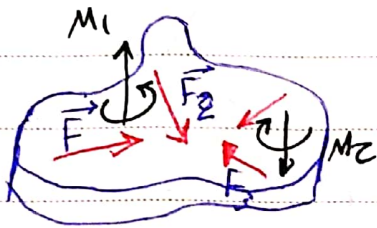
3.



4.



# Necessary and sufficient condition for the equilibrium in 2D



x-y plane

سؤال به چه شرایطی در یک جسم در می آید؟

① تعادل نیروها در یک صفحه مکرر دارند.

② نیروها در یک نقطه و در یک صفحه مکرر دارند.

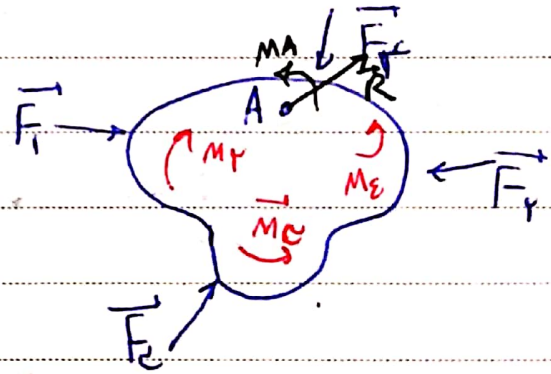
$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \sum \vec{F} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \quad \textcircled{1} \\ \sum F_y = 0 \quad \textcircled{2} \\ \sum F_z = 0 \rightarrow \text{بدنی از صفحه خارج شود} \end{array} \right. \\ \textcircled{2} \sum \vec{M} = 0 \xrightarrow[\text{غنیتر}]{\text{تنها حول}} \sum M_z = 0 \quad \textcircled{3} \end{array} \right.$$

The number of independent equations :

\* نقطه A به عنوان مرجع برای نوشتن معادلات تعادل:

$\vec{R} = 0$  ,  $\vec{M}_A = 0$   $2+1=3$  Eqs.

معادله ۲ معادله ۱



\* نقطه B به عنوان مرجع:

$\vec{R} = 0$  ,  $\vec{M}_B = 0$   $M_B \neq M_A$

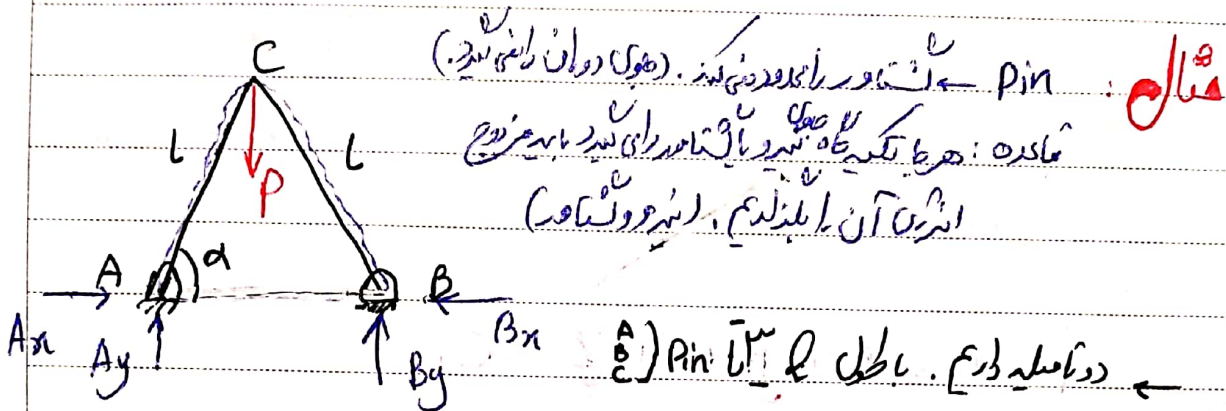
معادله ۲ معادله ۱



سوال آید  $\vec{M}_B = 0$  یک معادله مستقل به سیستم اضافه کند؟

نکته: اگر ثابت شود که  $\vec{M}_B = 0$  یک معادله مستقل است  $\neq$  برای یک سیستم در حال

تکامل به توانیم به نهایت معادله مستقل نویسیم؟



۱  $\sum F_x = 0 \rightarrow +A_x - B_x = 0$  ۱  $\rightarrow$  معادله ۱ /  $\sum F_x = 0$  معادله ۱

۲  $\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + A_y = P$  ۲  $\rightarrow$  معادله ۲ /  $\sum F_y = 0$  معادله ۲

۳  $\vec{M}_B = 0 \rightarrow -A_y l \cos \alpha + P_y l \cos \alpha = 0 \rightarrow B_y - A_y = 0$  ۳  $\rightarrow$  معادله ۳ /  $\vec{M}_B = 0$  معادله ۳

$\vec{M}_C = 0 \rightarrow -(A_x - B_x) l \sin \alpha - A_y l \cos \alpha + B_y l \cos \alpha = 0$   
 $(A_x - B_x) l \sin \alpha + (B_y - A_y) l \cos \alpha = 0$   $\rightarrow$  معادله ۴ /  $\vec{M}_C = 0$  معادله ۴

تکامل به نهایت معادله مستقل نویسیم؟  
 ما معادله یکسان را می‌نویسیم، فرض می‌کنیم آن نیرو یا گشتاور را اعمال می‌کنیم، پس می‌توانیم بفهمیم آیا آن نیرو یا گشتاور می‌تواند به تنهایی سیستم را متوازن کند یا نه. (این فرض نیست.)  
 اگر نیرو را می‌نویسیم، در آن نقطه ای که می‌نویسیم، آن نیرو را می‌نویسیم. (این فرض نیست.)  
 اگر گشتاور را می‌نویسیم، در آن نقطه ای که می‌نویسیم، آن گشتاور را می‌نویسیم. (این فرض نیست.)  
 اگر نیرو یا گشتاور را می‌نویسیم، در آن نقطه ای که می‌نویسیم، آن نیرو یا گشتاور را می‌نویسیم. (این فرض نیست.)

کوتاهه‌های قطری (اصطلاحی) کنیم.  $\Rightarrow p \cos \alpha - pl \cos \alpha + By = 0 \Rightarrow MA = 0$

$$\Rightarrow \boxed{By = P/2}$$

از معادلات (1) و (2) در بالا

$$\boxed{Ay = By = P/2}$$

در اینجا هنوز  $A_x$  و  $B_y$  مجهول هستند.

از معادلات مستقل

$x, y, z$

سیستم معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = C_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = C_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C_3 \end{cases}$$

حل دستگاه معادله  $\leftarrow$  برای  $x, y, z$  جواب داریم که صفر نیست

$$x \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$x \vec{V}_1 + y \vec{V}_2 + z \vec{V}_3 = \vec{C}$$

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots$

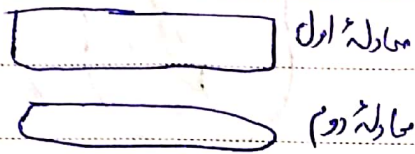
① در حالتی که  $\vec{C}$  یک صفر نباشد  $\leftarrow$   $\vec{C}$  نتواند جواب دهد.

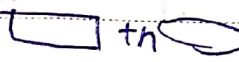
② در حالتی که  $\vec{C}$  یک صفر باشد  $\leftarrow$  به نام جواب دارد. اگر  $\vec{C}$  در همان صفر باشد.

جواب ندارد



الفرق بين معادلات الحركة، من تركيز على (معادلات متحرك معلوم) ونسبة سود، معادلة مستقلة  
بما في ذلك



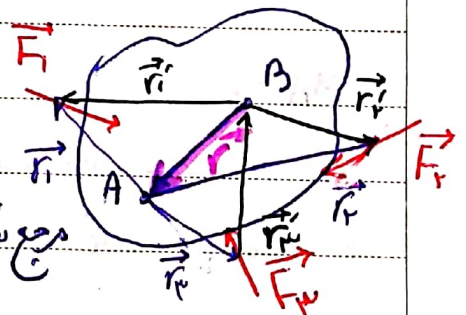
معادلة سوم  $m$    $h$   
 ① عند نقطة لزوجات دالة  
 ② حاصل التركيب على دو معادلة لوليه

Writing new momentum equations introduces no independent equation

$\vec{R} = 0$  ;  $\vec{M}_A = 0 \Rightarrow \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$  مرجع نقطة A

$\vec{R} = 0$  ;  $\vec{M}_B = 0$  معادلة مستقلة

$\vec{M}_B = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r} + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i$  مرجع نقطة B  
 $= \underbrace{\sum (\vec{r} \times \vec{F}_i)}_{\vec{R} = 0} + \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_A} = 0$



$\vec{r}_i' = \vec{r} + \vec{r}_i$

$\Rightarrow \vec{M}_B = \vec{M}_A$



## Alternative equations:

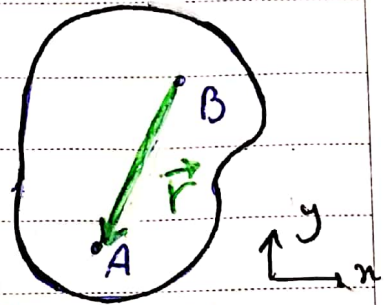
$$\sum F_x = 0$$

$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i + \vec{M}_A = 0$$



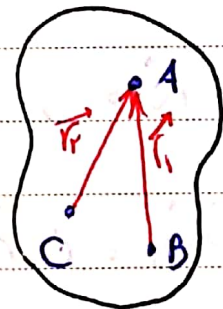
$$= (r_x \hat{i} + r_y \hat{j}) \times (\sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j})$$

$$= r_x \sum F_y = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0$$

$$\checkmark M_A = 0$$

$$M_B = 0 \rightarrow \vec{M}_B = \vec{r}_1 \times \sum \vec{F}_i + \vec{M}_A = 0 \quad (*)$$

$$M_C = 0 \rightarrow \vec{M}_C = \vec{r}_2 \times \sum \vec{F}_i + \vec{M}_A = 0 \quad (**)$$



$$\begin{aligned} (*) &\rightarrow r'_x \sum F_y - r'_y \sum F_x = 0 \\ (**) &\rightarrow r''_x \sum F_y - r''_y \sum F_x = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{r}_1 &= r'_x \hat{i} + r'_y \hat{j} \\ \sum \vec{F} &= \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \sum F_y \\ -\sum F_x \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} r'_x & r'_y \\ r''_x & r''_y \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} r'_x & r'_y \\ r''_x & r''_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum F_y \\ -\sum F_x \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \sum F_x = 0 \\ &\hookrightarrow \sum F_y = 0 \end{aligned}$$

In 2D there are exactly 3 independent equations  
is one of the following form:

$$\textcircled{1} \sum F_x = 0$$

$$\textcircled{2} \sum F_y = 0$$

$$\textcircled{3} M_A = 0$$

$$\textcircled{1} \begin{matrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} M_A = 0$$

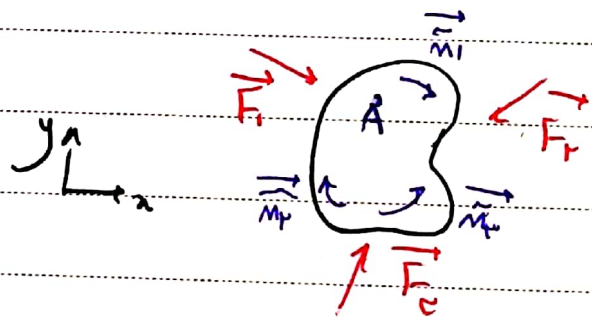
$$\textcircled{3} M_B = 0$$

$$\textcircled{1} M_A = 0$$

$$\textcircled{2} M_B = 0$$

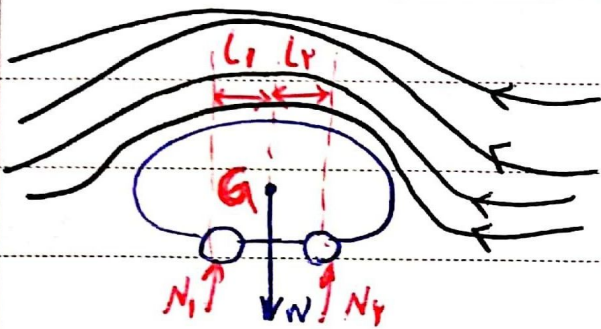
$$\textcircled{3} M_C = 0$$

3 independent equations



حلبه دهم

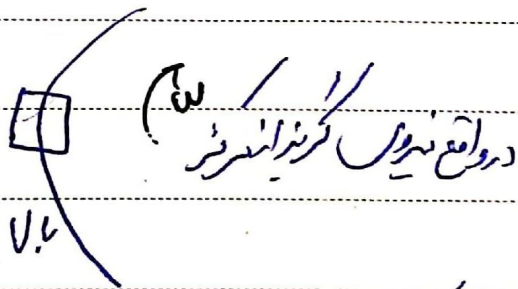
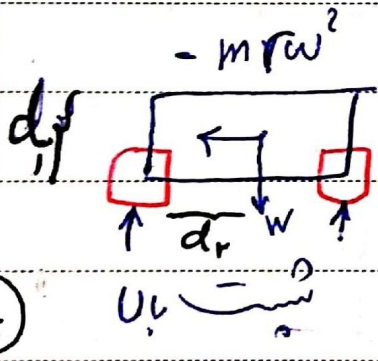
مثال:



میانگین استاتیکی کلکت

باله های ماسین برای الکترون

(در هیچ سرعت نسبتی در حرکت نیستند - به سبب چرخش)



باله، انکار می کنند و در حرکت نیستند

$$M_2 = -I \omega^2 d_2$$

$$M_1 = m r \omega^2 d_1 = m \frac{v^2}{r} d_1$$

گشتاور که باعث حرکت می شود  
از حرکت کند می شود



method I

inspke  $w, l_1, l_r$

$$\sum F_{x=0} \quad \text{crp}$$

$$\sum F_{y=0} \rightarrow \boxed{N_1 + N_r = W} \quad (1)$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -N_1 l_1 + N_r l_r = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{N_1}{N_r} = \frac{l_r}{l_1}} \quad (2)$$

(1) in (2)

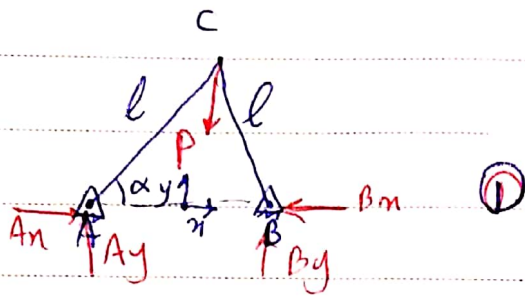
$$\Rightarrow N_1 + \left(\frac{l_1}{l_r}\right) N_1 = W \Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{l_r}{l_1 + l_r} W} \quad (3)$$

$N_r =$

method II

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow +N_r (l_1 + l_r) - W l_1 = 0 \Rightarrow \boxed{N_r = \frac{l_1}{l_1 + l_r} W}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -N_1 (l_1 + l_r) - W l_r = 0 \Rightarrow N_1 = \checkmark$$



مثال ۲

①  $\sum M_A = 0$

$$+By \times l \cos \alpha - Pl \cos \alpha \Rightarrow By = P/2$$

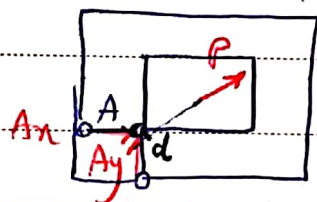
②  $\sum M_B = 0$

$$-Ay \times l \cos \alpha + Pl \cos \alpha = 0 \Rightarrow Ay = P/2$$

③  $\sum F_x = 0 \Rightarrow Ax = Bx$

توانستیم با استفاده از معادلات تعادل نیروهای در راستای  $x$  رابطه  $Ax = Bx$  تعیین کنیم.

تعیین کردن استاتیکی: Statical determinacy



\* مشخصات قفسه را بدیم.

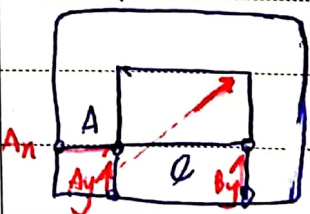
شماره نفرات و طول در محال باشد.

↓ زیرا

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot d = 0$$

شرط تعادل احداث نمی شود

ناممکن

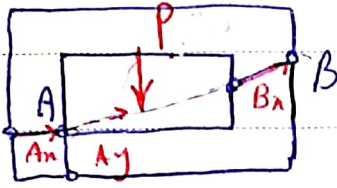


$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

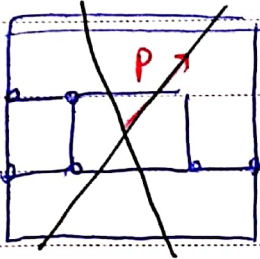
$$M_A = 0 \Rightarrow By = -\frac{P \cdot d}{l}$$

ممکن استاتیکی

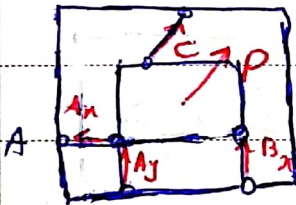


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot d = 0 \quad \times$$

ناصحی



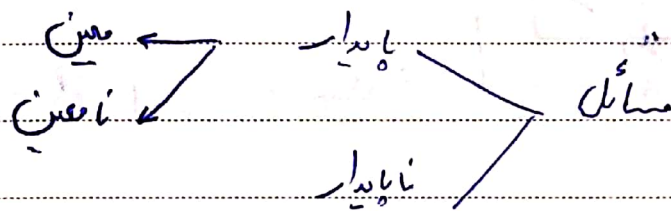
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{P = 0}$$



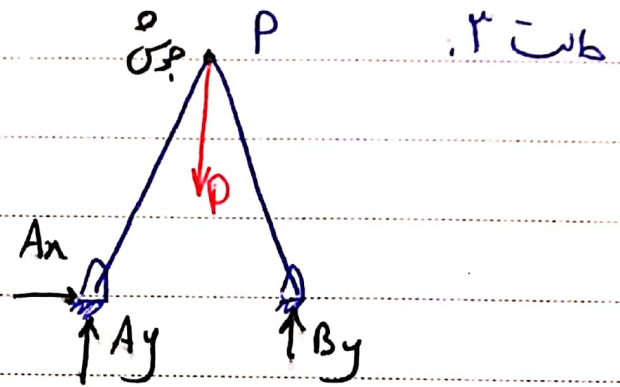
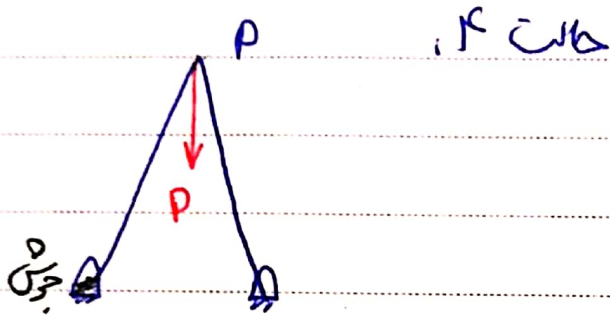
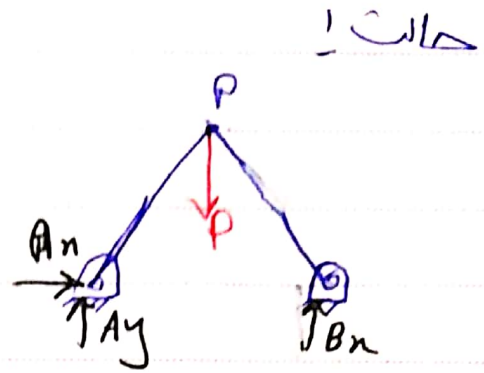
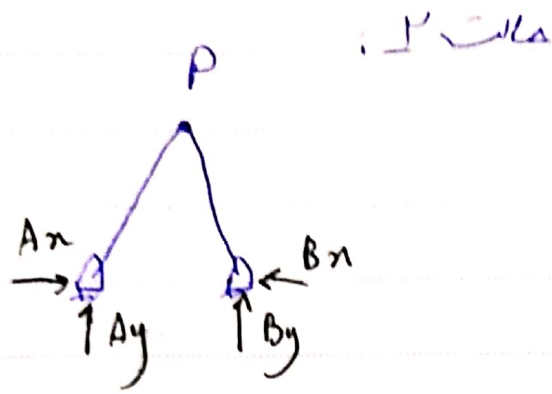
غیر متوازن حالت { عدم متوازن (مستطیل شکل)  
E معقول

ناصحی (استثنائی)

استثنائی حالات کی حالت جواب دے

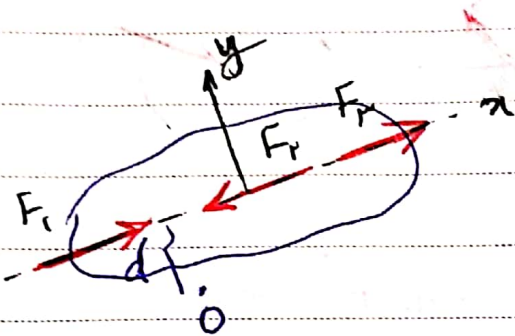






# Categories of Equilibrium in two dimensions:

1. Collinear force:

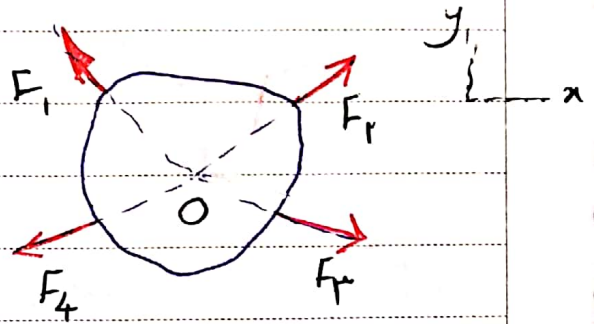


$$\sum F_y = 0 \rightarrow \text{نص}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow (F_1 - F_2 + F_3 + \dots) d = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0$$

2. Concurrent forces:

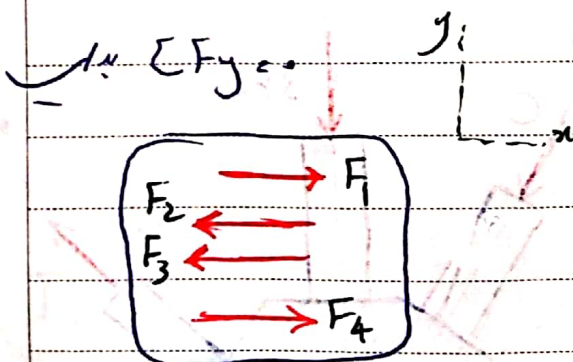


$$\sum F_x = 0 \quad \text{①}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{②}$$

$$\text{③ } \sum M_O = 0 \rightarrow \text{نص}$$

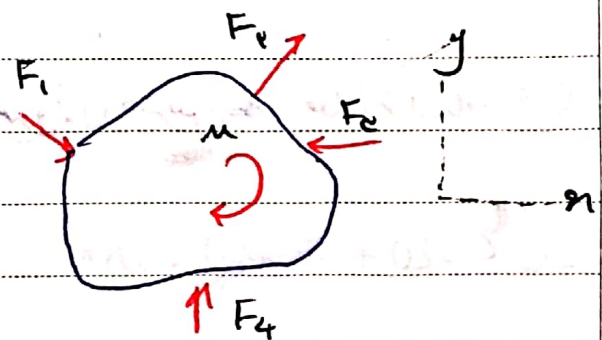
3. Parallel forces:



$$\sum F_x = 0 \quad \text{①}$$

$$\sum M_O = 0 \quad \text{②}$$

4. General case

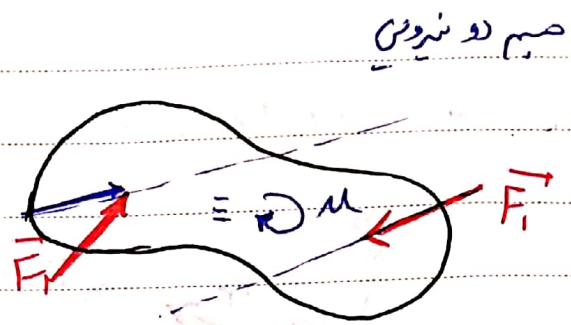
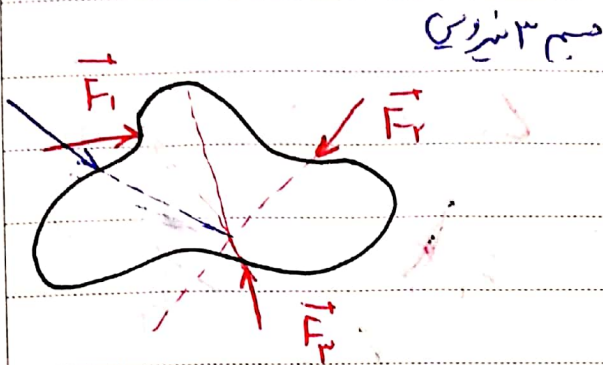


$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

## Two-and three -force membrane :



① تعادل نیرویی

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

②

$$\sum M = 0 \rightarrow F_1 d = 0$$

① شرط اول:  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  موازی باشند

② شرط دوم، خط  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  در یک خط اثرشکن باشند. نیروهای که صم ۳ نیرویی هستند.

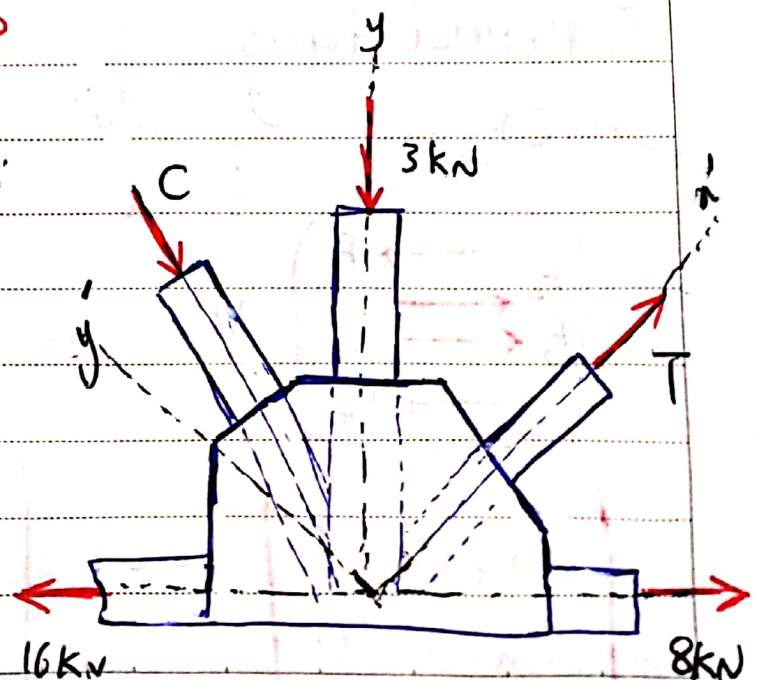
**نکته:** ما این شروط از معادلات تعادل بیست می آید.

Example:  $T$  و  $C$  را ؟

نیروی کششی  $T$  و نیروی فشرشی  $C$  معادله کشش و فشار می باشد.

$$-C \cos 20^\circ + T \sin 40^\circ = 3 \text{ kN}$$

$$T \cos 40^\circ + C \sin 20^\circ = 16 - 8 \text{ kN}$$

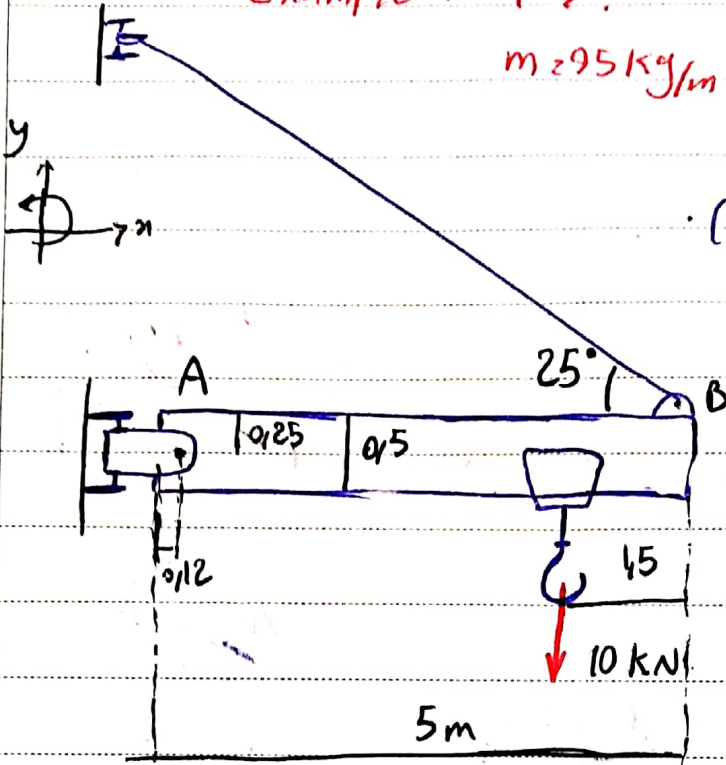


دو حالت دو مجهول



Example:  $T = ?$

$$m = 95 \text{ kg/m}$$



\* تنها با یک معادله می توانیم به دست آوریم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$-10 \text{ kN} \times (5 - 1.5 - 0.12) \text{ m}$$

$$- w(2.5 - 0.12)$$

$$+ T \sin 25 (5 - 0.12)$$

$$+ T \cos 25 \times 0.25 = 0$$

این روش غلط است.

$$W = 95 \times 5 \times 9.81 = 4.7 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow T = \frac{(33.8 + 11.19) \text{ kN.m}}{4.88 \sin 25 + 0.25 \cos 25} = 12.66$$