



کانال مهمات شریف

✓ @SHARIF_IE

چرا به دنبال تغییر فرم اجسام هستیم؟

۱- جلوگیری از شکست سازه در اثر نیروهای اعمالی ۲- محدودیت‌های طراحی: مثال پوهای توپین گاز

در مقاومت مصالح بصورت کلی دنبال دو چیز هستیم:

۱- مواد و سازه‌ها چه قدر استحکام دارند؟ ← کی می‌شکنند؟

۲- تحت نیروهای اعمالی چه قدر تغییر فرم می‌دهند؟

انحراف پذیری اجسام به چه عواملی بستگی دارد؟

۱- ماده ۲- هندسه ۳- نوع بارگذاری

مفهوم تنش - stress

سطح A - نیروی F

$$\begin{array}{lcl} A \rightarrow F & \Rightarrow & F/A \\ 2A \rightarrow 2F & \Rightarrow & F/A \\ nA \rightarrow nF & \Rightarrow & F/A \end{array} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \quad \text{نسب:}$$

واحد: $P_a = \frac{N}{m^2}$

نکته: چون اعداد تنش بسیار

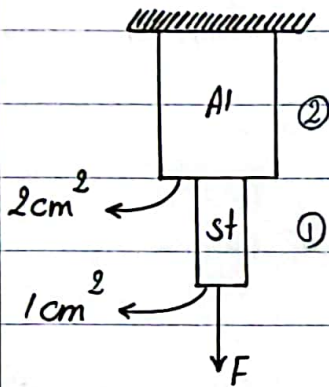
بزرگ هستند $\Rightarrow$ واحد مگاپاسکال

آلومینیوم	200 - 600 (MPa)
فولادها	300 - 2000 (MPa)
پلیمر	5 - 50 (MPa)

نکته ی مهم ← استقامت نقطه واسطه به « ماده » (ست).

سوال: حداکثر نیروی F قابل تحمل توسط سازه را بیابید.

تنش نهایی: آلومینیوم (200 MPa) - فولاد (350 MPa)



① $\uparrow R_{st}$
 $\downarrow F$
 $\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F = R_{st}$

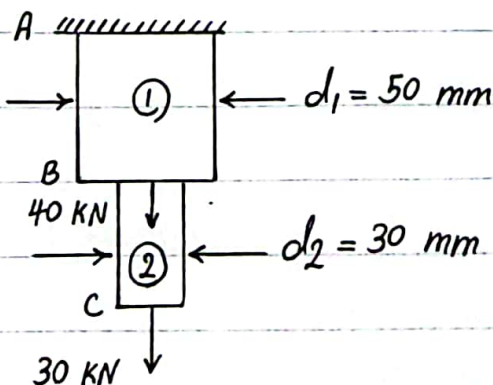
تنش: $\sigma = \frac{F}{A}$

② $\uparrow R_{Al}$
 $\downarrow F$
 $\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F = R_{Al}$

$$\begin{aligned} \text{st} \quad & 350 \times 10^6 = \frac{F_{max}}{10^{-4}} \Rightarrow F_{max} = 35 \text{ KN} \\ \text{Al} \quad & 200 \times 10^6 = \frac{F_{max}}{2 \times 10^{-4}} \Rightarrow F_{max} = 40 \text{ KN} \end{aligned}$$

حداکثر F مجاز = 35 KN

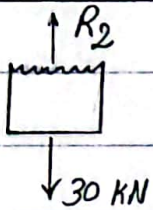
سوال:



الف) تنش قائم در میله های AB و BC چقدر است؟

ب) حداقل قطرهای d_1 و d_2 چقدر باشد بگویید.

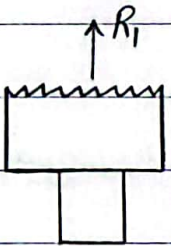
گ) تنش در میله ها از 140 MPa تجاوز نکند.



$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{الف})$$

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times 225 \times 10^{-6} \Rightarrow \sigma = 42.4 \text{ MPa}$$



$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 = 70 \text{ kN}$$

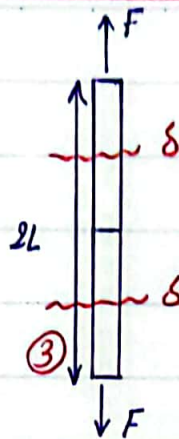
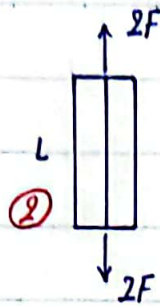
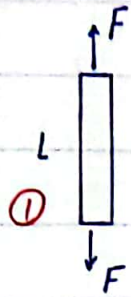
$$70 = \downarrow (30 + 40) \text{ kN} \quad A = 3.14 \times 625 \times 10^{-6} \Rightarrow \sigma = 35.7 \text{ MPa}$$

$$\begin{cases} \textcircled{2} & A = \frac{F}{\sigma} = \frac{30 \times 10^3}{140 \times 10^6} \Rightarrow A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\dots} \\ \textcircled{1} & A = \frac{F}{\sigma} = \frac{70 \times 10^3}{140 \times 10^6} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow d_1 = \sqrt{\dots} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

سطح A - نیروی F - طول L

تغییرات δ

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \text{کرنش (strain)}$$



① $\frac{F}{A} = \sigma \Rightarrow \delta$

② $\frac{2F}{2A} = \sigma \Rightarrow \delta$

③ $\frac{F}{A} = \sigma \Rightarrow 2\delta$

تغییر طول یک جسم تحت بار محوری به ۲ فاکتور بستگی دارد:

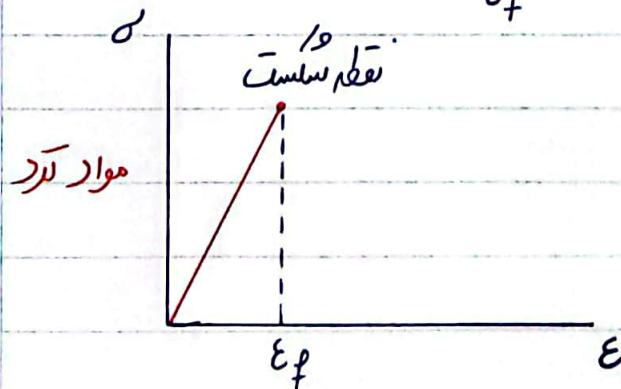
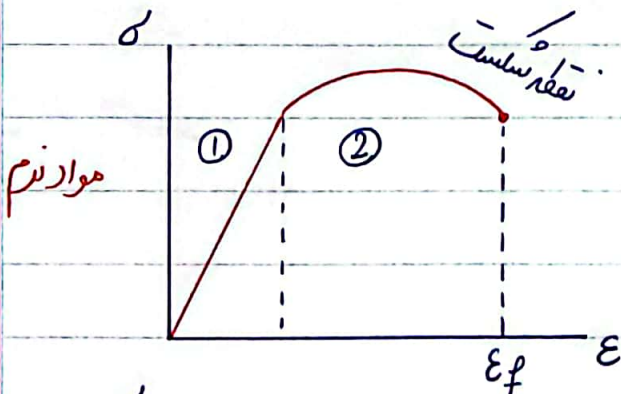
۱- تنش محوری اعمالی ۲- طول اولیه (مثلاً)

اگر هر کدام تغییر کند، δ تغییر میکند

رابطه بین σ و ϵ ← تست تجربی

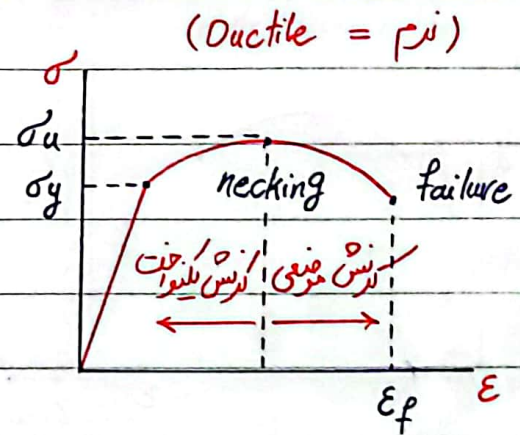
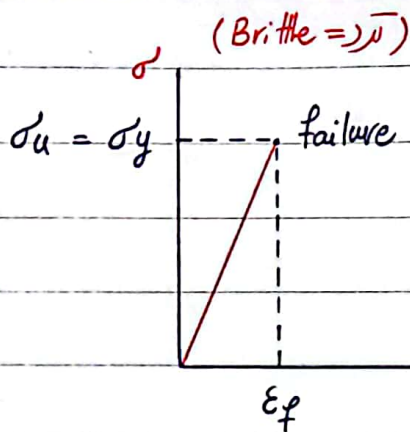
① ناحیه تغییر فرم الاستیک (کشسان)

② ناحیه تغییر فرم پلاستیک (دائمی)



ϵ_f مواد نرم حد اکثر ۰.۲ - ۰.۳ میرسد

ϵ_f مواد ترد زیر ۰.۰۵ (ست)

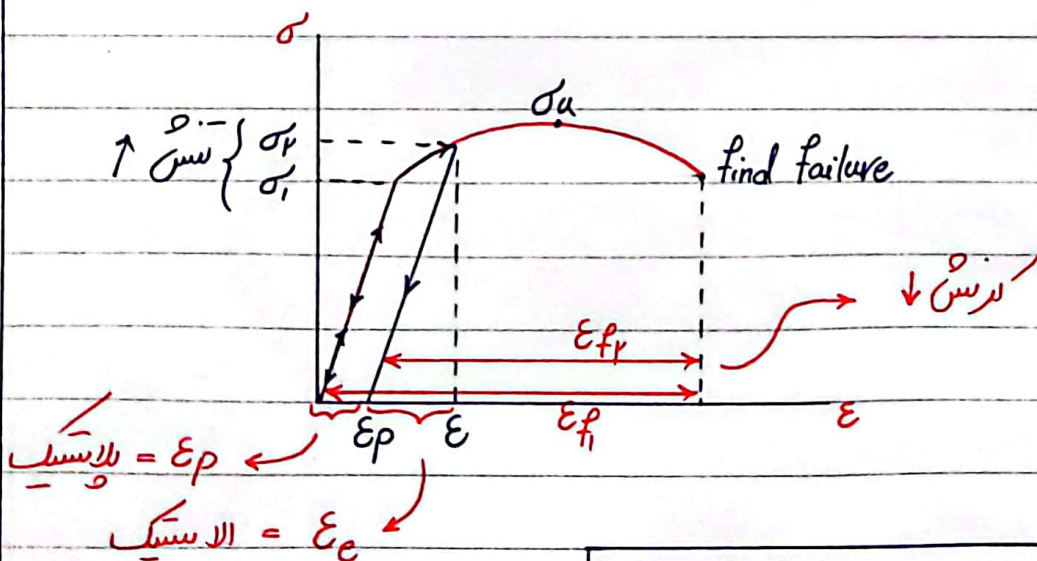


مثال: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y : \text{steel} = 400 \text{ MPa} \\ \sigma_u : \text{steel} = 600-700 \text{ MPa} \end{array} \right.$

$\sigma_y = \text{استقام تسلیم}$
 $\sigma_u = \text{استقام نهایی}$

تحلیل نمودار مواد نرم:

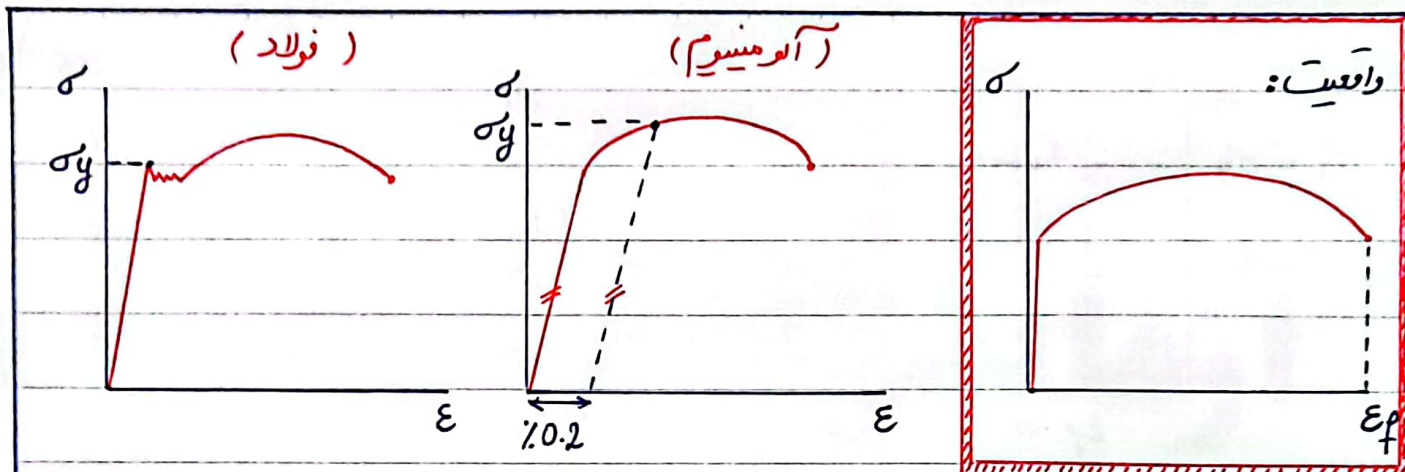
بارگذاری و باربرداری:



باهر بار بارگذاری و باربرداری ماده (استقام منبسط)

و تغییر فرم پذیری آن کمتر میشود

(necking = گلوئی شدن)

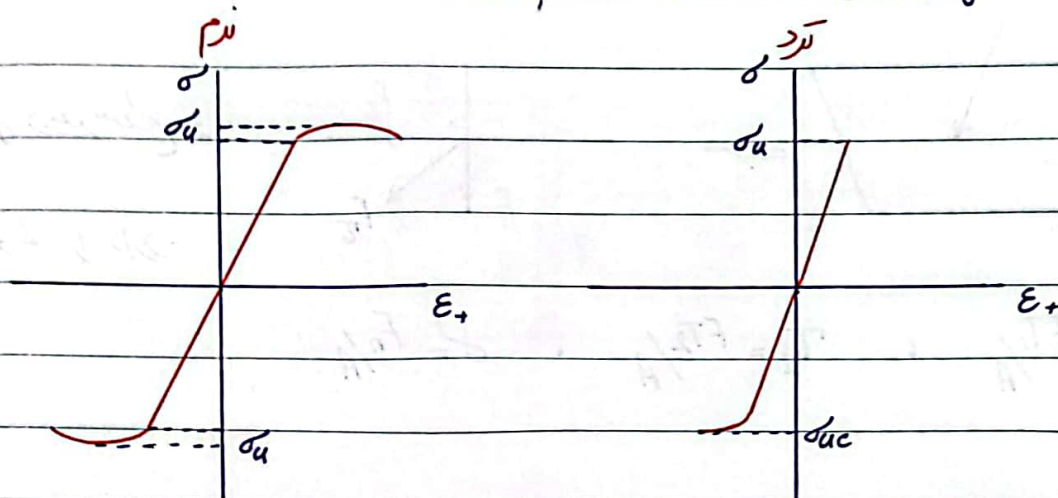


نکته: برای پدیده‌ی پلاستیک در آلومینیوم به اندازه 0.2٪ از مبدأ کرنش در نظر می‌گیریم و خطی

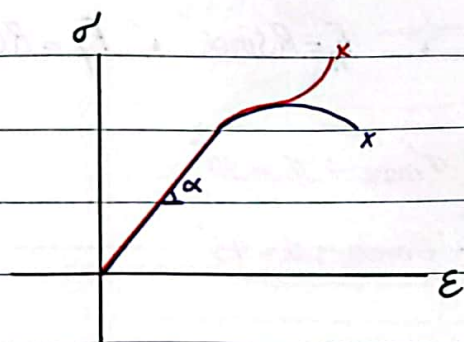
موازی قسمت الاستیک نمودار رسم می‌کنیم تا نمودار را در یک نقطه قطع کند.

نکته: نقطه پلاستیک برای فولاد، بخاطر شکل نمودار بسیار راحت مشخص می‌شود.

نمودارهای تنش - فشاری:



نکته: تنش فشاری (استقامت) بیشتری دارد زیرا اگر نقطه (ترک) داشته باشد، نسبت مسعود



- منحنی تنش کرنش حقیقی
- منحنی تنش کرنش مهندسی

$$E = \tan \alpha \rightarrow E [\text{GPa}] \quad (\text{مدول یانگ})$$

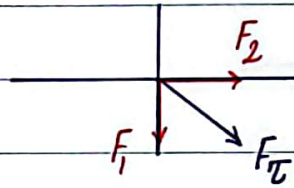
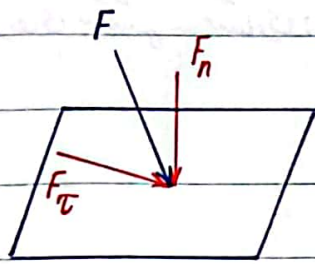
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مهندسی} \Rightarrow \sigma = F/A, \quad \epsilon = \frac{\Delta L}{L} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma = E \epsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حقیقی} \Rightarrow \sigma = F/A, \quad \epsilon = \int \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \end{array} \right.$$

$$E_{St} = 200-210 \text{ GPa}$$

$$E_{Al} = 70 \text{ GPa}$$

نکته: مدول یانگ فقط در ناحیه الاستیک است.

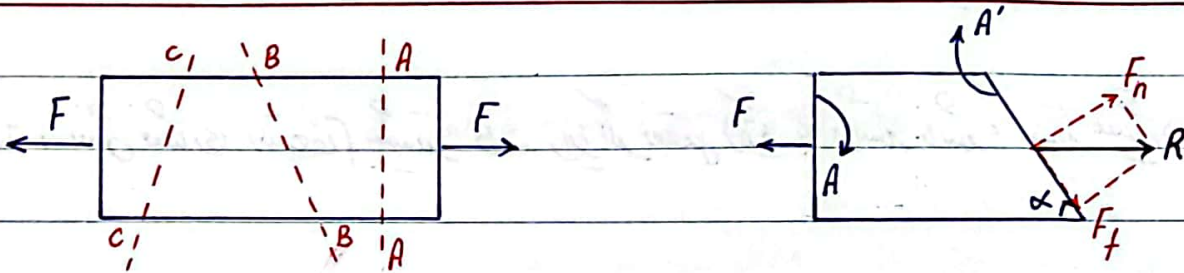


تنش برشی (Shear stress)

نیروی برشی در هر سطح دو

موازی و 2 را دارد.

$$\tau_1 = F_{T1}/A, \quad \tau_2 = F_{T2}/A, \quad \sigma = F_n/A$$



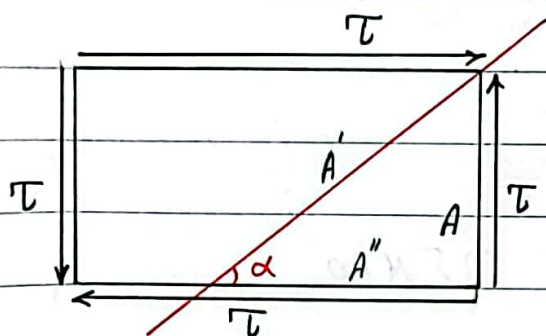
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R = F, \quad A' = A/\sin \alpha, \quad F_n = R \sin \alpha, \quad F_f = R \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = R \sin \alpha / A' = F/A \sin^2 \alpha \longrightarrow \sigma_{\max} : \alpha = 90^\circ \\ \tau = R \cos \alpha / A' = F/A \sin \alpha \cos \alpha \longrightarrow \tau_{\max} : \alpha = 45^\circ \end{array} \right.$$

مواد نرم تحت نیروهای اعمالی در صفحه‌ای می‌شوند که در آن تنش برشی ماکزیمم شود.

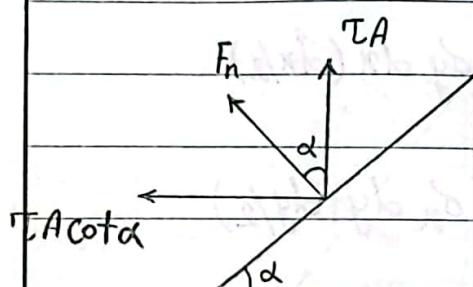
مواد ترد // تنش نرمال ماکزیمم شود // // // // // //

مثال: ورق از جنس سیم تحت تنش برشی قرار گرفته است. زاویه شکست α آن را بیابید.



طبق مثلثات:

$$\begin{cases} A' = A \cot \alpha \\ A'' = A / \sin \alpha \end{cases}$$



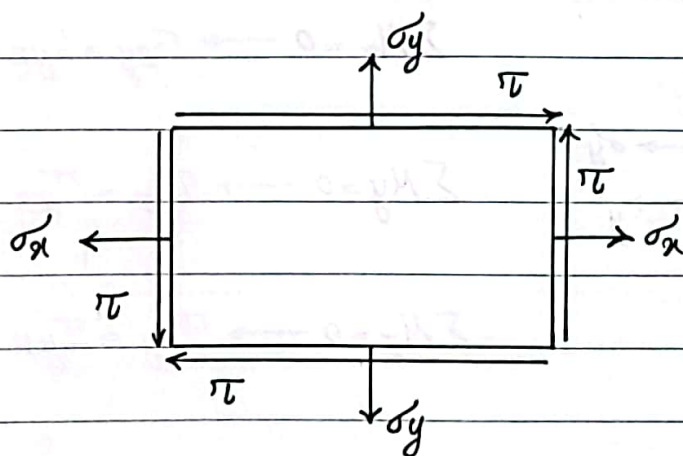
$$F_n = TA \cos \alpha + TA \cot \alpha \sin \alpha = 2TA \cos \alpha$$

ماده ترد است پس σ باید max باشد:

$$\sigma = F_n / A' = \frac{2TA \cos \alpha}{A / \sin \alpha} \Rightarrow \sigma = 2T \cos \alpha \sin \alpha = 2T \sin 2\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 45^\circ} \leftarrow 2\alpha = 90^\circ \leftarrow \sigma_{max}$$

تمرین:

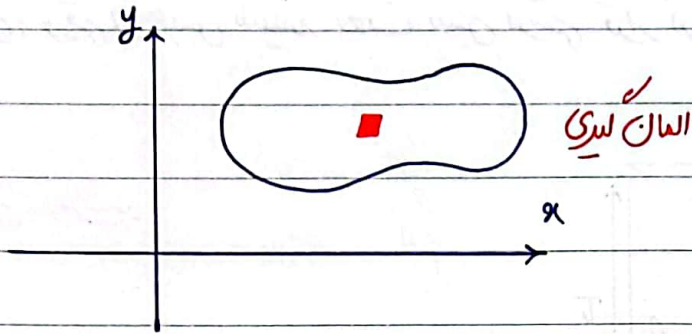


در حالت: α شکست

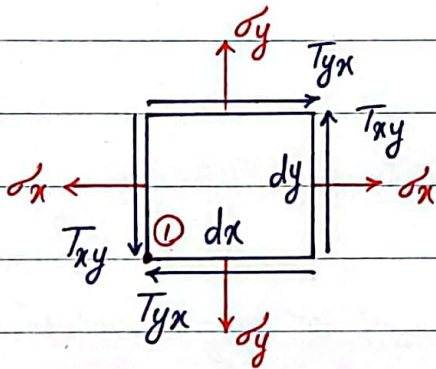
اگر سیم باشد؟

اگر فولاد باشد؟

نسخ برسی 3D:



$$\textcircled{1} \sum M = 0$$



$$\cancel{\sigma_y dx (dx/2)} - \cancel{\sigma_y dx (dx/2)}$$

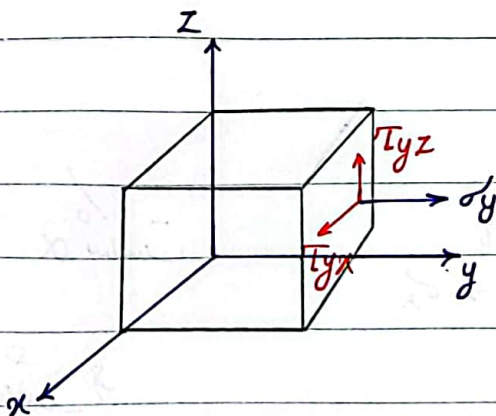
$$\cancel{\sigma_x dy (dy/2)} - \cancel{\sigma_x dy (dy/2)}$$

$$\tau_{xy} dy dx - \tau_{yx} dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} dy dx = \tau_{yx} dx dy$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$



$$\sum M_x = 0 \rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

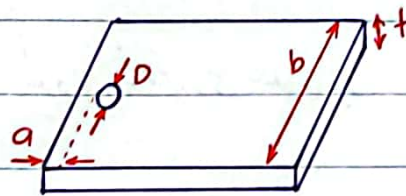
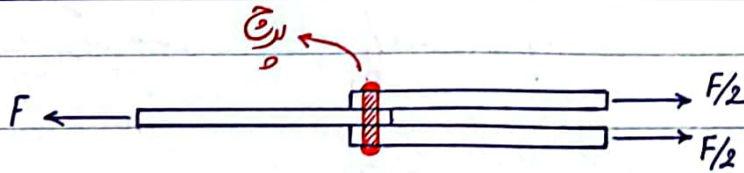
$$\sum M_z = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

رأسی نسخ برسی τ_{00} رأسی عمود بر صفحه

تعیین: (بابت)

$$\text{Safety Factor} = S.F \rightarrow \sigma_{\text{design}} = \frac{\sigma_u}{S.F} \Rightarrow S.F = \frac{\sigma_u}{\sigma_{\text{design}}}$$

عدد $S.F$ باید بیشتر از یک باشد تا ریسک شکست را برای طراحی آن سازه کاهش دهد. $S.F > 1$

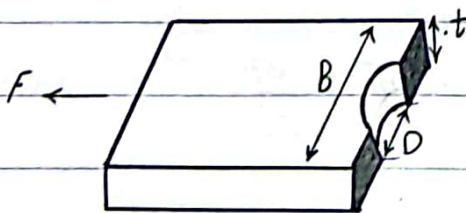


نمای 3D صفحه بالا یا پایین:

باتوجه به نوع بارگذاری (حتمال شکست در صفحه چپ بیشتر است). پس آن را بررسی کرد.

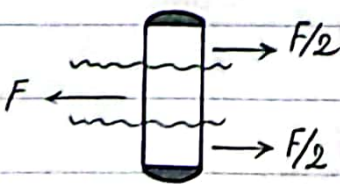
در حالت برای شکست در تفرقه میگیریم:

حالت اول: پارگی صفحه از ناحیه اطراف سوراخ:



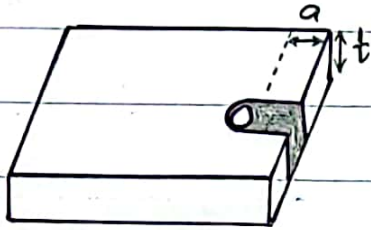
$$\Rightarrow \sigma = \frac{F}{(B-D)t}$$

حالت دوم: خراب شدن بین تنش برشی ماکزیمم $F/2 =$



$$\Rightarrow \tau = \frac{F/2}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

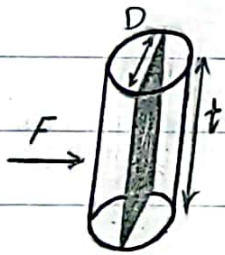
حالت سوم: جدا شدن لایه‌ای از صفحه (shear out) ← تنش برشی



$$\Rightarrow \tau = \frac{F}{2at}$$

* (وسطح درگیر می‌شود) ← $2at$ داریم.

حالت چهارم: لهشگی (Bearing) ← فشار شدن سوراخ و تقوین



برای سطوح متغنی نیرو به صفحه‌ای عمود بر راستای خود وارد می‌شود

یعنی در انتخاب صفحه Dt نیرو وارد می‌شود.

$$\Rightarrow \sigma_b = \frac{F}{Dt}$$

در لغاری سلیست : $\sigma_u = F/A \rightarrow \tau_{max} = \sigma_u/2$

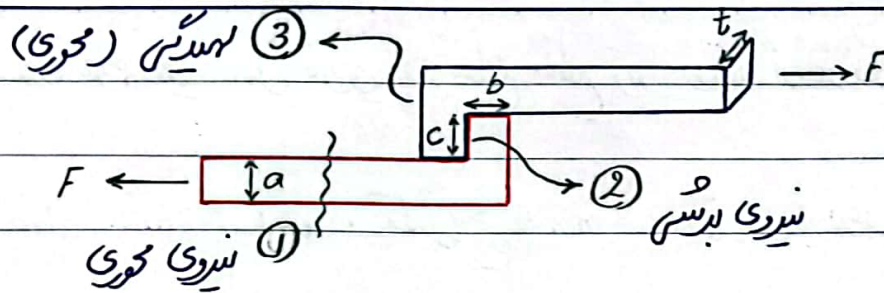
اُشیات با استفاده از روابط : $\sigma = F/A \sin^2 \alpha$; $\tau = F/A \sin \alpha \cos \alpha$

جمع بندی : $\sigma = F/(B-D)t \rightarrow \sigma_u \Rightarrow SF_1 = \frac{\sigma_u}{\sigma_1}$

2 حالت دوم : $\tau = 2F/\pi D^2 \rightarrow \tau_{max} = 0.5\sigma_u \Rightarrow SF_2 = \frac{0.5\sigma_u}{\tau_2}$

3 حالت سوم : $\tau = F/2at \rightarrow \tau_{max} = 0.5\sigma_u \Rightarrow SF_3 = \frac{0.5\sigma_u}{\tau_3}$

4 حالت چهارم : $\sigma_b = F/Dt \rightarrow \sigma_u \Rightarrow SF_4 = \frac{\sigma_u}{\sigma_b}$



$$1: \sigma_1 = F/at \longrightarrow \sigma_u \longrightarrow SF_1 = \sigma_u/\sigma_1$$

$$2: \tau = F/bt \longrightarrow \sigma_{u/2} \longrightarrow SF_2 = \frac{\sigma_{u/2}}{\tau}$$

$$3: \sigma_b = F/ct \longrightarrow \sigma_u \longrightarrow SF_3 = \sigma_u/\sigma_b$$

نتیجه می‌باشد:

$$\sigma_{u_c} > \sigma_{u_f} \longleftarrow \text{ماره‌ی تیر}$$

$$\sigma_{u_c} = \sigma_{u_f} \longleftarrow \text{ماره‌ی چکش خوار}$$

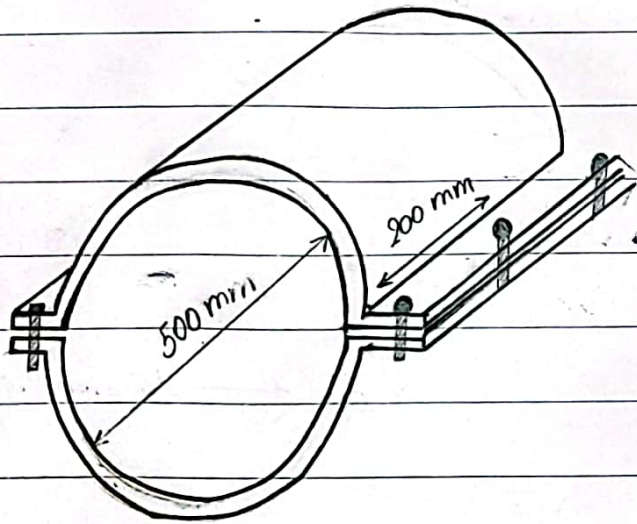
مسئله: برای طراحی یک کانال هوایی دو سطح مقطع زیر در نظر گرفته شده است. اگسار هوای -

داخل کانال 100 kPa باشد و قطر پیچ ها 8 mm باشد و با فرض فاصله 200 mm بین پیچ ها

در امتداد کانال (عمود بر صفحه) تعیین کنید کدام طرح بهتر است.

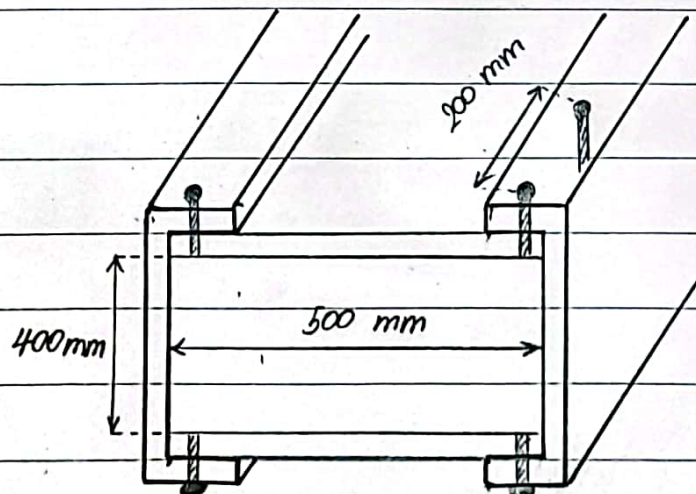
(فرض کنید نسأ داخل کانال، کانال دایره ای را در راستای عمود و کانال مربعی را در راستای افقی

مقبوضه از هم جدا کنند. جنس پیچ ها از فولاد ساختمانی با « $\sigma_u = 400 \text{ MPa}$ » است.)

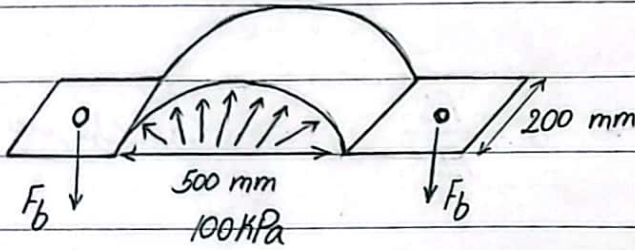


حالت اول:

حالت دوم:



پاسخ: حالت اول:



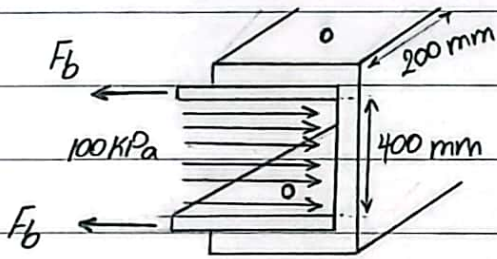
تension $\sigma_u = 400 \text{ MPa}$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F_b = 100 \times 10^3 \times (500 \times 200 \times 10^{-6}) \Rightarrow F_b = 5 \text{ kN}$$

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{5 \times 10^3}{\frac{\pi (8)^2}{4} \times 10^{-6}} = 99.5 \text{ MPa} \rightarrow SF_1 = \frac{\sigma_u}{\sigma_b} = \frac{400}{99.5} = 4$$

حالت دوم:

تension $\tau_{allowable} = \frac{\sigma_u}{2} = 200$

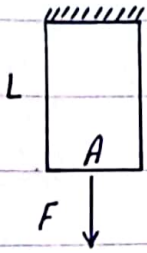


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2F_b = 100 \times 10^3 (400 \times 200 \times 10^{-6}) \Rightarrow F_b = 4 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F_b}{A_b} = \frac{4 \times 10^3}{\frac{\pi (8)^2}{4} \times 10^{-6}} = 79.6 \text{ MPa} \quad SF_2 = \frac{\tau_{allowable}}{\tau} = \frac{200}{79.6} = 2.5$$

$SF_1 > SF_2$ ← حالت اول مناسب تر است.

تغییر فرم های محوری :



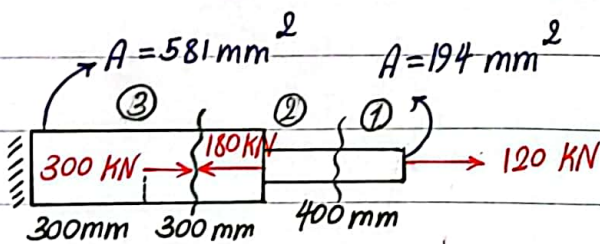
$$\sigma = E \epsilon$$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

تغییر طول محوری

مثال: تغییر شکل سازه‌ی زیر در اثر بارهای وارده را بیابید

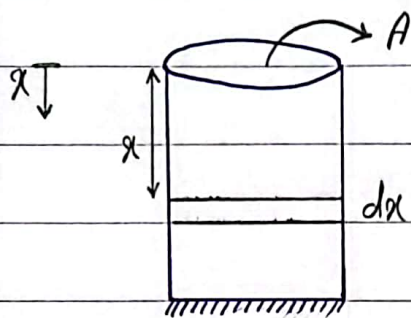


$$\textcircled{1} \quad \leftarrow F_1 \quad \rightarrow 120 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 120 \text{ kN} \quad (\text{کشش})$$

$$\textcircled{2} \quad F_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 180 \\ \leftarrow \end{array} \right\} \rightarrow 120 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad F_2 = -60 \text{ kN} \quad (\text{فشاری})$$

$$\textcircled{3} \quad \leftarrow F_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 300 \\ \leftarrow \end{array} \right\} \rightarrow 120 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad F_3 = 240 \text{ kN} \quad (\text{کشش})$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{total}} &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E} + \frac{F_2 L_2}{A_2 E} + \frac{F_3 L_3}{A_3 E} \\ &= \frac{120 \times 10^3 \times 400 \times 10^{-3}}{194 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} + \frac{(-60) \times 10^3 \times 300 \times 10^{-3}}{581 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} + \frac{240 \times 10^3 \times 300 \times 10^{-3}}{581 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} \\ &\Rightarrow \delta_{\text{total}} = 1.73 \times 10^{-3} \text{ m} = \boxed{1.73 \text{ mm}} \end{aligned}$$



تغییر فرم استوانه تولید در اثر وزن خودش:

$\rho = \text{چگالی}$

$E = \text{مدول}$

$H = \text{ارتفاع}$

$$F(x) = mg = (\rho V \rho) g = \rho g (Ax)$$

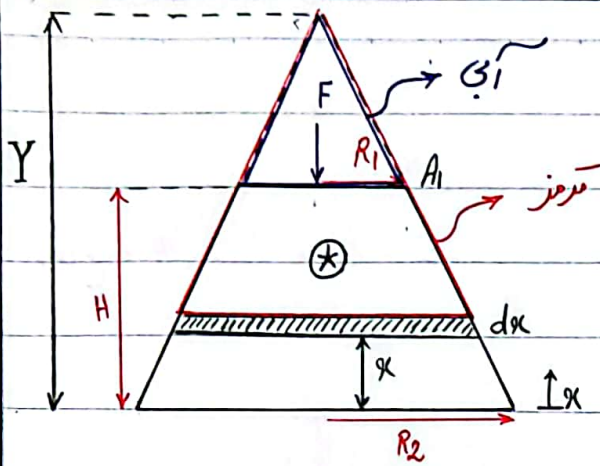
$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

$$\delta = \frac{\rho g}{2E} H^2$$

$$\Rightarrow d\delta = \frac{F(x) dx}{AE} \Rightarrow \delta = \int d\delta = \int_0^H \frac{F(x) dx}{AE} = \int_0^H \frac{\rho g Ax}{AE} dx$$

نکته: اگر جسم را از وسط ببلاییم؛ تغییر فرم کلی آن صفر میشود!

مسئله: تغییر فرم را حساب کنید (ρ, E)



$$\delta = \frac{PL}{AE} \rightarrow \int_0^H d\delta = \int_0^H \frac{P(x) dx}{A(x) E}$$

$$[A(x) = \pi R(x)^2] \quad \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \pi R(x)^2 \times \text{ارتفاع}$$

معادله خطی $\rightarrow R(x) = R_2 - \frac{(R_2 - R_1)}{H} x$

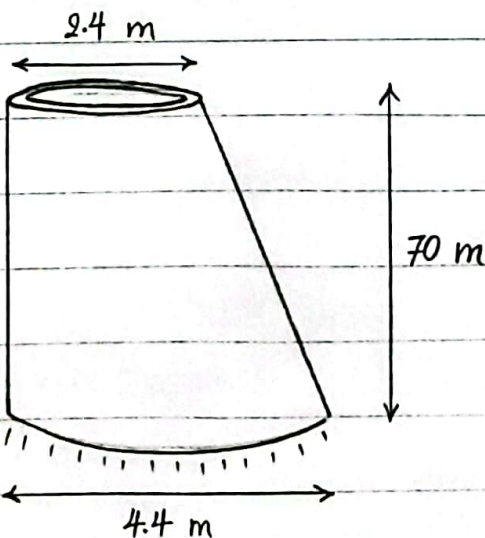
$$P(x) = F + \rho g V_* \rightarrow V_* = V_{\text{وزن}} - V_{\text{ای}}$$

$$V_{\text{وزن}} = \frac{1}{3} A(x) (Y - x) \quad ; \quad V_{\text{ای}} = \frac{1}{3} A_1 (Y - H)$$

معادله در $x=0$ $\rightarrow R(x)=0 \Rightarrow R_2 - \frac{(R_2 - R_1)}{H} Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{R_2 H}{R_2 - R_1}$

$\rightarrow V_*$ به دست می آید $\Rightarrow \int_0^H \frac{P(x) dx}{A(x) E} \Rightarrow$ (انجام محاسبات)

نمودار سوال

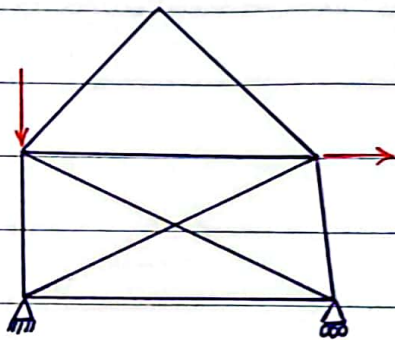
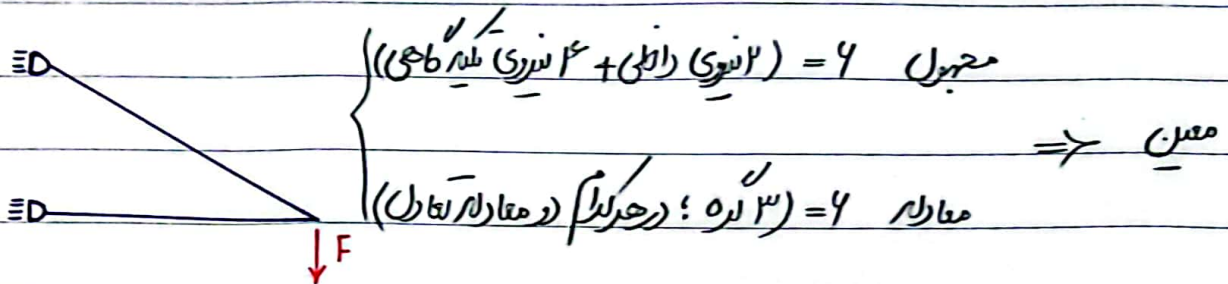


الف) تغییر طول محوری پایه در اثر وزن خود؟

ب) مقدار تنش در پایه؟

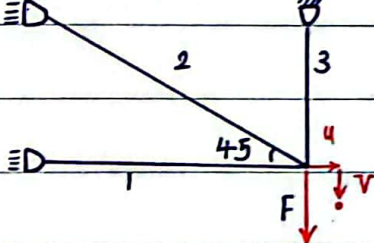
$E = 210 \text{ GPa}$; ضخامت = 25 mm ; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

حل معادلات و مسئله های نامعین (استاتیکی)



یک درجه نامعین $\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{مجهولات} &= 8 + 3 = 11 \\ \text{معادلات} &= 5 \times 2 = 10 \end{aligned} \right.$

۸ معادله و ۹ مجهول $\Rightarrow$ ۱ درجه نامعین



معادلات قابل $\left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + P_3 = F \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow P_1 + P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned} \right.$ (۲ معادله ۳ مجهول)

$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{AE}$ (۳ معادله (ضمانت ساز)
 $\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{AE}$ (۳ مجهول (ضمانت ساز)

$\left\{ \begin{aligned} \delta_1 &= u \quad ; \quad \delta_3 = v \\ \delta_2 &= u \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u + v) \end{aligned} \right. \quad (*)$

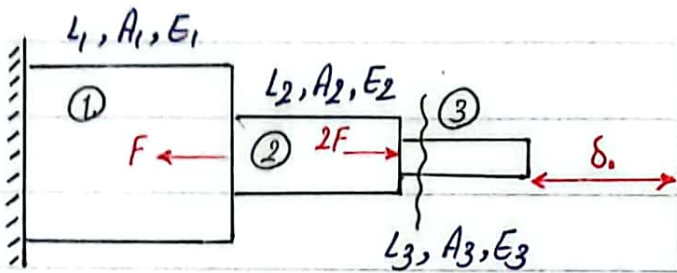
$\delta_3 = \frac{P_3 L_3}{AE}$ معادلات نسبی (نسبت)

معادلات تطبیق (Compatibility) (۳ معادله ۲ مجهول)

(*) تفسیر طول نقطه در راستای طول عضو (است).

$\Leftarrow$ تعداد معادلات = تعداد مجهولات ✓

مثال (الف) مقدار F را طوری بنویسید که تنش‌های میل‌ها به دیوار سمت راست برسد.



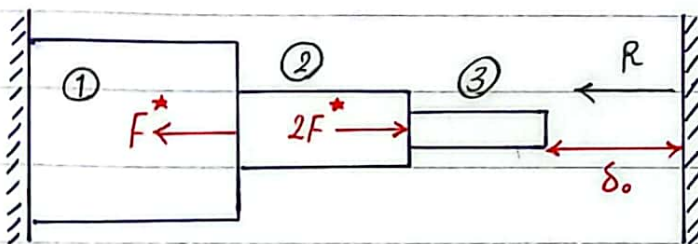
تنش مردهیم:

$$\begin{cases} P_3 = 0 \\ P_2 = 2F \\ P_1 = F \end{cases} \quad \delta = PL/AE$$

$\Rightarrow \delta_1 = FL_1/A_1E_1$; $\delta_2 = 2FL_2/A_2E_2$; $\delta_3 = 0$; $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_0$

$\Leftarrow$ مجهولات: F و δ_1, δ_2 $\Leftarrow$ حل سه معادله سه مجهول $\Leftarrow F$ نسبت می‌آید

ب) فرض کنید $F^* = 2F$ به میل‌ها وارد شده است. (این حالت تنش در اعضا را نسبت آورده)



با دو برابر شدن F ، یک نیروی تکیه‌گاهی R از سمت راست وارد می‌شود.

(فشاری)

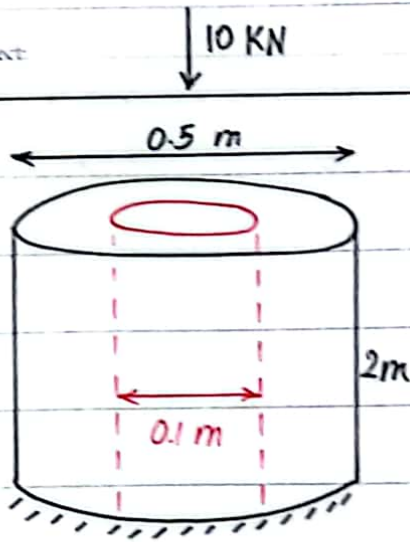
$\Rightarrow P_3 = -R$; $P_2 = 2F^* - R$; $P_1 = F^* - R$

$\Rightarrow \delta_1 = (F^* - R)L_1/A_1E_1$; $\delta_2 = (2F^* - R)L_2/A_2E_2$; $\delta_3 = RL_3/A_3E_3$

نکته: میزان تغییر فرم طی نسبت به حالت «الف» عوض نمی‌شود! $\Leftarrow \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_0$

$\Leftarrow$ معادله $\Leftarrow$ مجهول $\Leftarrow R$ نسبت می‌آید $\Leftarrow$ نیروهای داخلی نسبت می‌آید

$\Leftarrow$ تنش در اعضا طبق رابطه مناسب می‌شود $\Leftarrow [\sigma = P/A]$



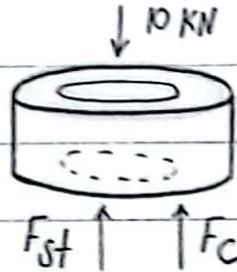
$$E_c = 25 \text{ GPa}$$

$$E_{st} = 210 \text{ GPa}$$

مسائل

$$\sigma_{st} = ?$$

$$\sigma_c = ?$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{st} + F_c = 10 \text{ kN}$$

تغایر $\Rightarrow \delta_{st} = \delta_c \Rightarrow \frac{F_{st}L}{A_{st}E_{st}} = \frac{F_cL}{A_cE_c}$

$$\Rightarrow F_c = 2.86 F_{st} \Rightarrow F_{st} = 7409.3 \text{ (N)} \quad F_c = 2590.7 \text{ (N)}$$

$$\sigma_{st} = F_{st}/A_{st} = 0.33 \text{ MPa} ; \sigma_c = F_c/A_c = 0.04 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

$\alpha, L, \Delta T$

تغییر فرم حرارتی

α = ضریب انبساط حرارتی

L = طول میل

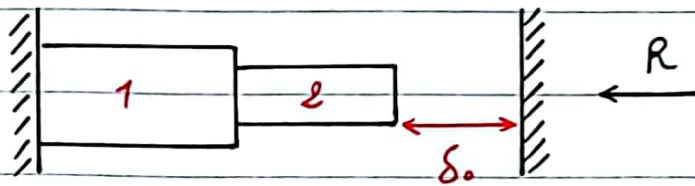
ΔT = تغییر دما

$$\Rightarrow \Delta L = \alpha L \Delta T \rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon_{\text{Thermal}} = \alpha \Delta T$$

نکته: این ضابطه برای تغییر فرم در راستای محوری میباشد!

مسئله: اگر دمای میله‌های روبه‌رو را به اندازه ΔT گرم کنیم، تنش در عضو 1 و 2 را بیابید.



حالت اول:

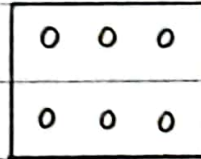
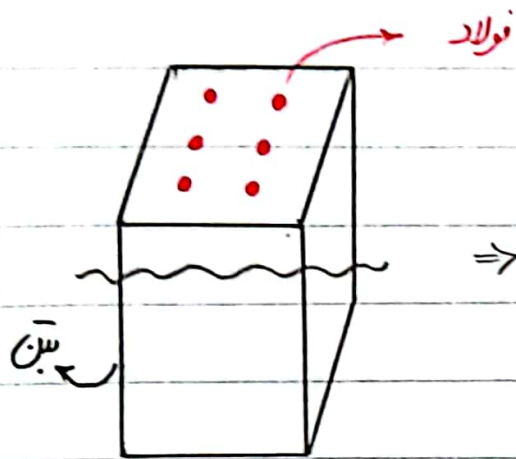
$$\begin{cases} \delta_{1T} = \alpha L_1 \Delta T \\ \delta_{2T} = \alpha L_2 \Delta T \end{cases} \Rightarrow \delta_{1T} + \delta_{2T} < \delta_0 \Rightarrow \alpha \Delta T (L_1 + L_2) < \delta_0$$

$$\Rightarrow \Delta T < \delta_0 / \alpha (L_1 + L_2) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

If: $\Delta T > \delta_0 / \alpha (L_1 + L_2) \Rightarrow (\delta_{1T} + \delta_{1m}) + (\delta_{2T} + \delta_{2m}) = \delta_0$: حالت دوم

$$\Rightarrow (\alpha L_1 \Delta T - R L_1 / A_1 E) + (\alpha L_2 \Delta T - R L_2 / A_2 E) = \delta_0$$

$$\Rightarrow R = ? \quad \checkmark \Rightarrow \sigma_1 = R_1 / A_1 \quad ; \quad \sigma_2 = R_2 / A_2$$



$$\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{سَن (مات)}$$

$$\alpha_{st} = 1.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$A_{st} = 400 \text{ mm}^2 \quad \text{(هر لایم)}$$

$$E_{st} = 200 \text{ GPa} \quad E_c = 25 \text{ GPa} \quad \Delta T = +30^\circ\text{C}$$

نکته: نیروهای داخلی فولاد و سَن به هم وارد میشوند تا جلوی تغییر فرم بلاط را بگیرند.

$$\Rightarrow \delta F_{st} + F_c = 0 \Rightarrow \delta F_{st} = -F_c \Rightarrow \text{یک نیرو کششی؛ (باری فشاری)}$$

$$\text{سَن} \Rightarrow \text{تغییر فرم حرارتی سَن} \Rightarrow \delta_{total\ st} = \delta_{total\ c}$$

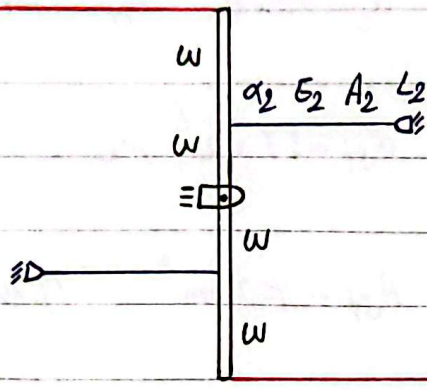
$$\Rightarrow (\delta_{T_{st}} + \delta_{M_{st}}) = (\delta_{T_c} + \delta_{M_c})$$

$$\Rightarrow \alpha_{st} L \Delta T + F_{st} L / A_{st} E_{st} = \alpha_c L \Delta T + F_c L / A_c E_c$$

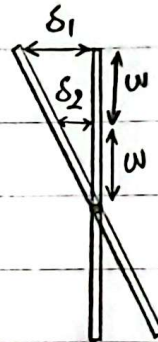
حل ۲ معادله ۲ مجهول F_{st} و F_c وابسته می آیند

$\Rightarrow$ تنش داخلی هر عضو متناسب میشود.

$$\alpha_1 E_1 A_1 L_1$$

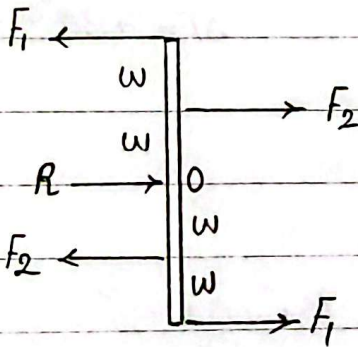


$$\Delta T \downarrow \Rightarrow \sigma_1 = ? \quad \sigma_2 = ?$$



$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2w}{w} \quad \text{بالتساوي}$$

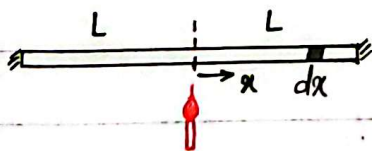
$$\Rightarrow \boxed{\delta_1 = 2\delta_2} \quad \text{نتيجة}$$



$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow 2wF_1 = wF_2 \Rightarrow F_2 = 2F_1$$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} - \alpha_1 L_1 \Delta T} \quad ; \quad \boxed{\delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2}}$$

$$\sigma_1 = F_1/A_1 \quad ; \quad \sigma_2 = F_2/A_2 \quad \checkmark \quad \Leftarrow \quad F_2, F_1 \quad \Leftarrow \quad \text{والمساواة وبعدها}$$



$$\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(\frac{-|x|}{c}\right) \rightarrow \sigma = ?$$

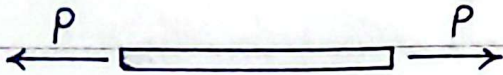
$$d\delta_T = \alpha dx \Delta T(x) \Rightarrow \delta_T = \int d\delta_T = 2 \int_0^L \alpha \Delta T_0 \exp\left(\frac{-|x|}{c}\right) dx$$

$$\Rightarrow \delta_T = 2 \Delta T_0 \alpha \left(-c \exp\left(\frac{-x}{c}\right)\right) \Big|_0^L = 2 \alpha c \Delta T_0 (1 - \exp(-L/c))$$

$$\Rightarrow \delta_m = \frac{-R2L}{AE} \rightarrow \delta_m + \delta_T = 0 \quad \text{بالتساوي}$$

$$\Rightarrow -R2L/AE + 2\alpha c \Delta T_0 (1 - \exp(-L/c)) = 0 \Rightarrow R \checkmark \Rightarrow \sigma = R/A$$

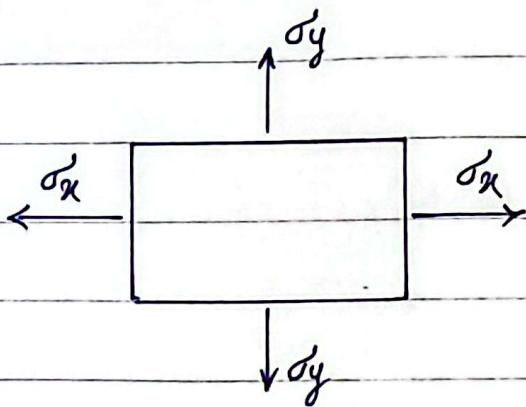
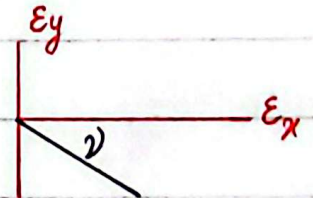
ضریب بواسون (Poission ratio)



(ضخامت کم می شود) $\Rightarrow \sigma_x, \epsilon_x \longrightarrow -\epsilon_y$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_y = -\nu \epsilon_x}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{سوی} \rightarrow 0 < \nu < 1 \\ \text{در عمل} \rightarrow 0 < \nu < 0.5 \end{array} \right.$

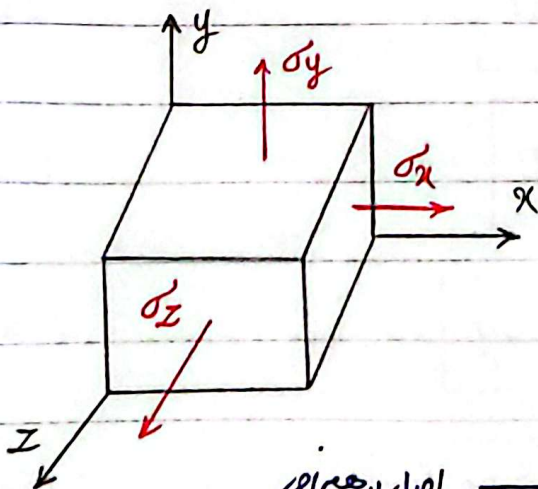


$$\sigma = E \epsilon \quad ; \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E$$

$$\epsilon_y = \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E$$

: superposition



اصل برهم انباشتی $\rightarrow$

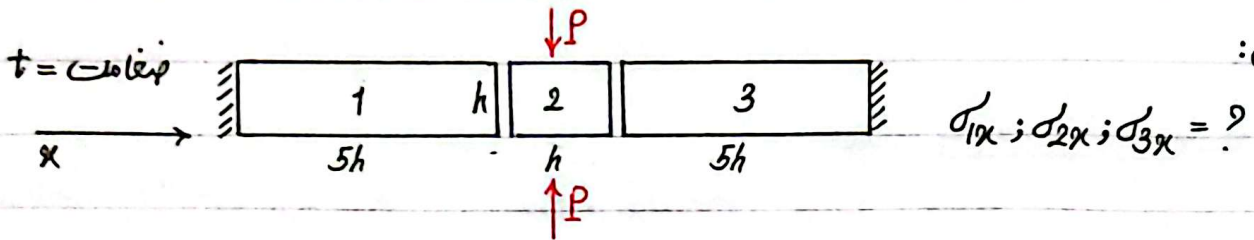
$$\epsilon_x = 1/E (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = 1/E (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = 1/E (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

: سه سوی

مسائل:



$$\sigma_{1x} = -R/ht \quad ; \quad \sigma_{2x} = -R/ht \quad ; \quad \sigma_{3x} = -R/ht$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y3} = 0 \quad ; \quad \sigma_{y2} = -P/ht \quad \quad \sigma_{1x} + \sigma_{2x} + \sigma_{3x} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{توازن}$$

$$\Rightarrow 5h \epsilon_{x1} + h \epsilon_{x2} + 5h \epsilon_{x3} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_x = E \epsilon_x \quad \Rightarrow \quad \text{جابجایی مساوی}$$

$$\Rightarrow 5h(-R/Eht) + h(-R/Eht - P(-P/Eht)) + 5h(-R/Eht) = 0$$

$$\Rightarrow R \text{ مثبت است} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = -R/ht \quad \checkmark$$

درستی:

$$\left. \begin{array}{l} \text{کنش حرارتی} \\ \text{مساحت} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta S}{S} = 2\alpha \Delta T$$

سری:

$$\left. \begin{array}{l} \text{کنش حرارتی} \\ \text{حجم} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta T$$

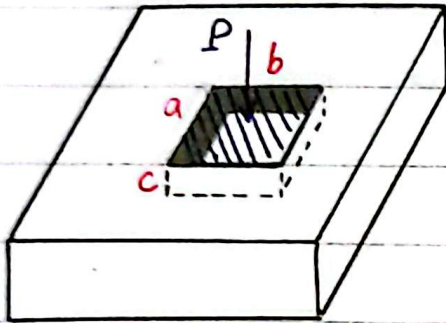
درستی:

$$\left. \begin{array}{l} \text{کنش مکانیکی} \\ \text{مساحت} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta S}{S} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

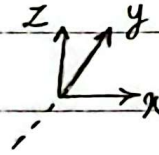
سری:

$$\left. \begin{array}{l} \text{کنش مکانیکی} \\ \text{حجم} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

مسالہ: ۱۷



$$\Delta C = ?$$



$$\begin{cases} \sigma_x = -P_1/ac \\ \sigma_y = -P_2/bc \\ \sigma_z = -P/ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = 1/E (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = 0 & (1) \\ \epsilon_y = 1/E (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0 & (2) \\ \epsilon_z = 1/E (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & (3) \end{cases}$$

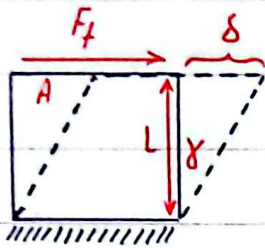
$$(1) = (2) \rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z = \sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z$$

$$\Rightarrow (1+\nu)\sigma_x = (1+\nu)\sigma_y \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y \Rightarrow (1) \text{ جانشینی}$$

$$\Rightarrow \sigma_y - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = 0 \Rightarrow \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z = \sigma_x \Rightarrow (3) \text{ جانشینی}$$

$$\Rightarrow \epsilon_z = 1/E (\sigma_z - \nu(\frac{2\nu}{1-\nu}) \sigma_z) \Rightarrow \epsilon_z = \frac{\Delta C}{C}$$

$$\Rightarrow \Delta C = C \sigma_z / E (1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}) = -CP/Eab (1 - 2\nu^2/(1-\nu)) \quad \checkmark$$

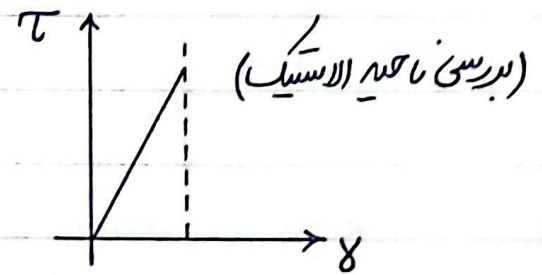
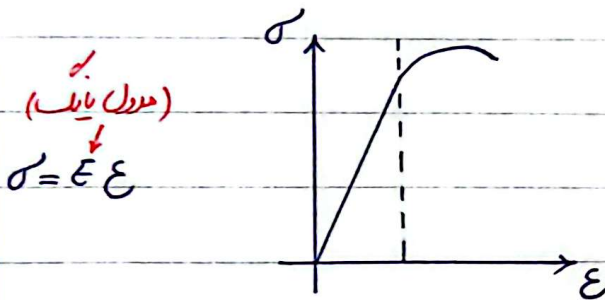


$$\tau = \frac{F_t}{A}$$

$$\gamma = \frac{\delta}{L} \quad \text{: کرنش برشی}$$

ع: کرنش محوری

γ: کرنش برشی



G مساوی E یک خاصیت ماده است.

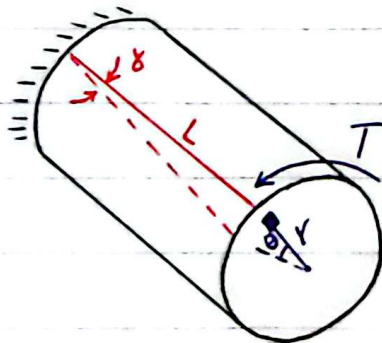
$$\tau = G \gamma$$

G: مدول برشی

$$E, G \text{ رابطه‌ی } \rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{cases} \nu=0 \rightarrow G=0.5 E \\ \nu=0.5 \rightarrow G=0.33 E \end{cases}$$

مثال: میل ۱ متری به شعاع ۱ cm از فولاد ۴۵° چرخانده ایم. T_{max} را بدست آورید.

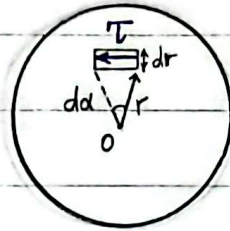
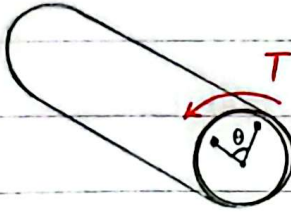


$$\begin{cases} L\gamma = r\theta \Rightarrow \gamma = \frac{r\theta}{L} \\ T = G\gamma \Rightarrow T = \frac{Gr\theta}{L} \end{cases}$$

$T = \text{Torque}$

$$T_{max} = \frac{Gr}{L} \theta = 70 \times 10^9 \times (1 \times 10^{-2}) \times \pi/4 = 550 \text{ MPa}$$

رابطه بین نیروی کششی و تغییر زاویه:



$$T = \int_A dT$$

$$dT = (\tau dA) \times r = \tau r^2 d\alpha dr \longrightarrow dA = dr (r d\alpha) ; \tau = \frac{Gr}{L} \theta$$

$$\Rightarrow \int dT = \int_A \frac{G\theta}{L} r^3 d\alpha dr \longrightarrow \int r^3 d\alpha dr = \int r^2 (r d\alpha dr) = \int r^2 dA = J$$

$$\Rightarrow T = \frac{G\theta}{L} J \longrightarrow \theta = \frac{TL}{GJ} \xrightarrow{\text{مقاومت}} \delta = \frac{FL}{AE}$$

نکته: $\int r^2 dA =$ معادل دوم سطح $\leftarrow$ برای شکل‌های ساده باید حفظ باشیم!

روی هر محور $\leftarrow$ لا نیسان و θ متفاوت داریم.

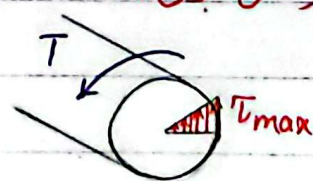
روی هر سطح مقطع $\leftarrow$ θ نیسان و لا متفاوت داریم.

نکته: « لا وابسته به r » و « θ وابسته به L » میباشد.

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow \frac{G\theta}{L} = \frac{T}{J}$$

$$\tau = \frac{Gr}{L} \theta$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$



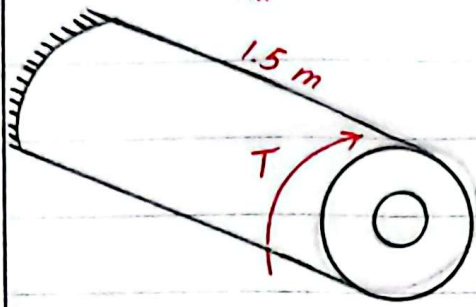
رابطه بین نیروی کششی و تنش برشی:

مسئله: سفتی از جنس فولاد (ریم. الف) درخواستیم نسبت برشی

$$D_{in} = 40 \text{ mm}$$

$$D_{out} = 60 \text{ mm}$$

از 120 MPa تجاوز نکند؛ ما نیزیم تست در بعضی اعمال به نسبت؟

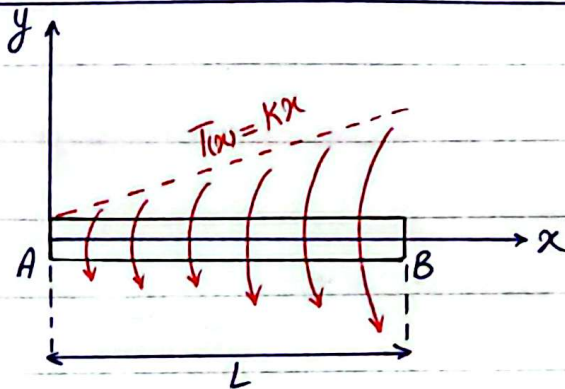


ب) منبسط نسبی برشی متناظر در سفت محدود است؟

$$\tau = \frac{T r}{J} \Rightarrow \tau_{max} \rightarrow r = 30 \text{ mm} \Rightarrow 120 \times 10^6 = \frac{T (30 \times 10^{-3})}{1.021 \times 10^{-6}} \quad \text{الف)}$$

$$J = (\pi/2) R^4 = \pi/2 (R_o^4 - R_i^4) = \pi/2 (30^4 - 20^4) \times 10^{-12} = 1.021 \times 10^{-6} \Rightarrow T \checkmark$$

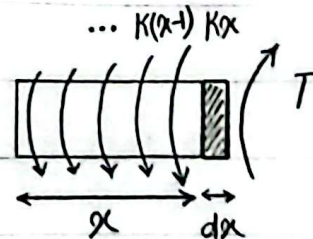
$$(T = 4.08 \text{ KN}\cdot\text{m}) \quad \tau_{min} \text{ (at } r=20) \Rightarrow \tau_{min} = \frac{(4.08 \times 10^3)(20 \times 10^{-3})}{1.021 \times 10^{-6}} = 80 \text{ MPa} \quad \text{ب)}$$



مسئله: $\theta_A = ?$

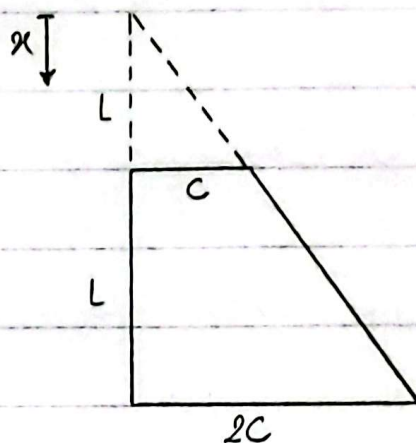
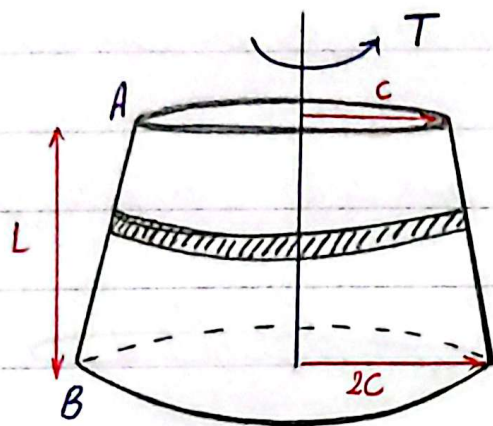
$$\text{سطح مقطع دایره} \rightarrow J = \pi r^4 / 2$$

$$\theta = \frac{T(x) L}{G J} \rightarrow \text{برش و التان} \rightarrow$$



$$\Rightarrow T = \int_0^x T(x) dx = \int_0^x Kx dx = \frac{Kx^2}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{T(x) dx}{G J}$$

$$\Rightarrow \theta = \int d\theta = \int \frac{Kx^2 dx}{2 G J} = \frac{K}{2 G J} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^L \Rightarrow \theta = \frac{KL^3}{6 G J}$$


 $\theta_A = ?$

$$r(x) = \frac{C}{L} x$$

$$L < x < 2L$$

$$J = \frac{\pi}{2} r(x)^4 \quad d\theta = \frac{T dx}{G J(x)} \Rightarrow \theta = \int_L^{2L} \frac{T dx}{G \frac{\pi}{2} \left(\frac{C}{L} x\right)^4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2TL^4}{\pi G C^4} \left(\frac{-1}{3x^3} \right) \Big|_L^{2L} \Rightarrow \theta = \frac{7TL}{12\pi G C^4}$$

(قسمت ج سوال صنفه بعد) نکته: جهت چرخش برای علامت زاویه در نظر گرفته شود!

$$\theta_{C-B} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{G J_{BC}} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.7}{70 \times 10^9 \times (13.92 \times 10^{-6})} = 14.37 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_{B-A} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G J_{AB}} = \frac{6 \times 10^3 \times 0.9}{70 \times 10^9 \times \left(\frac{\pi}{2} \times \left(\frac{77.8 \times 10^{-3}}{2}\right)^4\right)} = 21.46 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_{C-A} = \theta_{C-B} + \theta_{B-A} = (14.37 + 21.46) \times 10^{-3} = 35.83 \times 10^{-3} \text{ rad} = 2.05^\circ$$

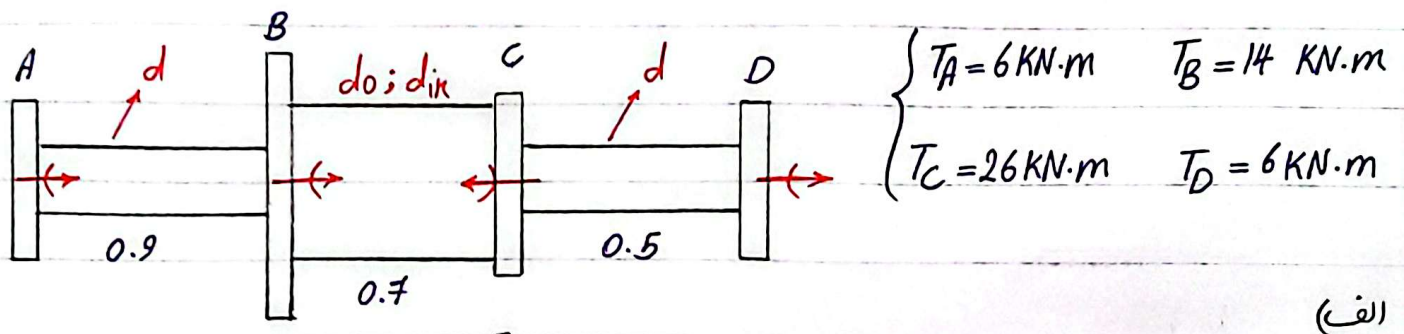
(علامت هر دو در یک جهت است.)

محل، شفت BC توخالی با قطر $d_i = 90 \text{ mm}$ و $d_o = 120 \text{ mm}$ ؛ شفت های AB و CD

تویر با قطر d . الف) $\max$ و $\min$ تنش برشی (شفت BC)

ب) قطر d به گونه ای که تنش برشی مجاز در آن ها از 65 MPa تجاوز نکند.

ج) اگر شفت ها از جنس فولاد با $G = 70$ باشند، معادل را در پیکش نقطه C نسبت به نقطه A؟



برش در BC $\Rightarrow$ $\Rightarrow T = T_A + T_B = 6 + 14 = 20 \text{ kN.m}$

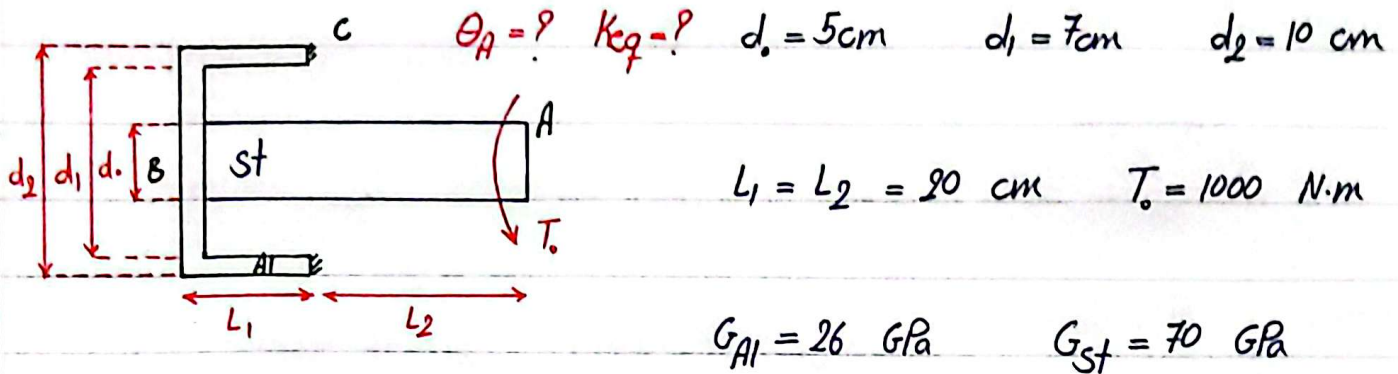
$$\tau_{BC} = \frac{T_{BC} r}{J_{BC}} \begin{cases} \tau_{BC} (\max) = \frac{T_{BC} r_o}{J_{BC}} = \frac{20 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-3}}{13.92 \times 10^{-6}} = 86.2 \text{ MPa} \\ \tau_{BC} (\min) = \frac{T_{BC} r_i}{J_{BC}} = \frac{20 \times 10^3 \times 45 \times 10^{-3}}{13.92 \times 10^{-6}} = 64.7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$T_{AB} = T_{CD} = 6 \text{ kN.m} \Rightarrow \tau_{AB} = \frac{T_{AB} r}{J} \Rightarrow 65 \times 10^6 = \frac{6 \times 10^3 \times d/2}{\pi/2 (d/2)^4}$ (ب)

$\Rightarrow \boxed{d = 77.8 \text{ mm}}$

الف) $J_{BC} = \pi/2 (r_o^4 - r_i^4) = \pi/2 (60^4 - 45^4) = 13.92 \times 10^{-6}$

(قسمت ج صفحه قبل)



$$\delta = FL/AE \Rightarrow K_{eq} = F/\delta = AE/L \Rightarrow K_{eq} = T/\theta$$

$$T_{AB} = T_0, \quad T_{BC} = T_0 \quad (\text{نقطة ثابتة}) \quad \text{في نقطة C} \Rightarrow \theta_C = 0$$

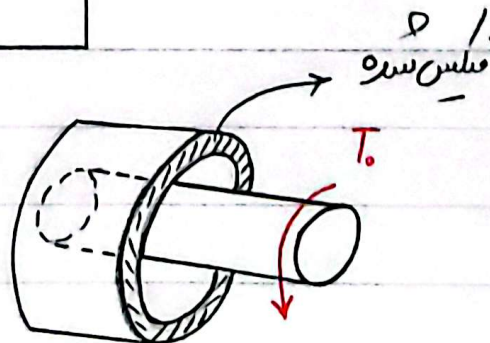
$$\theta_{B-C} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{G_{Al} J_{BC}} = \frac{T_0 L_2}{G_{Al} J_{BC}} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow J_{BC} = \frac{\pi}{2} [(d_2/2)^4 - (d_1/2)^4] \quad \checkmark$$

$$\theta_{A-B} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G_{St} J_{AB}} = \theta_A - \theta_B \Rightarrow J_{AB} = \frac{\pi}{2} (d_0/2)^4; \quad L_{AB} = L_1 + L_2$$

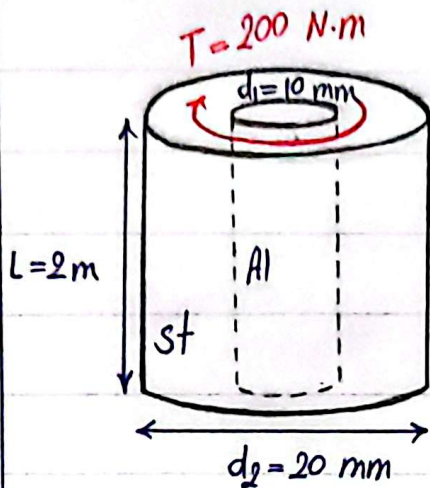
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{T_0}{\pi/32} \left[\frac{(L_1 + L_2)}{G_{St} d_0^4} + \frac{L_2}{G_{Al} (d_2^4 - d_1^4)} \right] = 0.003 \text{ rad} = 0.59^\circ \quad \checkmark \quad (\text{الف})$$

$$\Rightarrow K_{eq} = T_0/\theta_A = 96.6 \text{ kN.m/rad} \quad \checkmark$$

حالت 3D مبسطة:

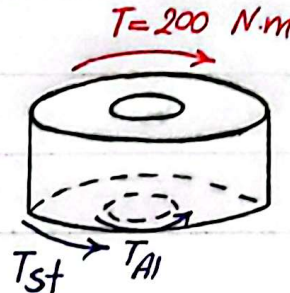


مسائل تا مبحث (نمای کلی) (بررسی)



$$\theta = ? \quad T_{\max}(st) = ? \quad T_{\max}(Al) = ?$$

$$G_{st} = 70 \text{ GPa} \quad G_{Al} = 26 \text{ GPa}$$



$$\tau = Tr/J \Rightarrow \text{برس ميزنم} \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \quad T_{st} + T_{Al} = 200 \text{ N.m}$$

$$J = \pi/2 (d)^4 \checkmark$$

$$\text{تطابق} \Rightarrow \theta_{st} = \theta_{Al} \Rightarrow \frac{T_{st} L}{G_{st} J_{st}} = \frac{T_{Al} L}{G_{Al} J_{Al}} \Rightarrow$$

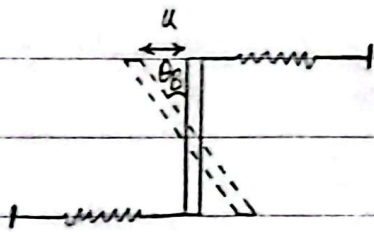
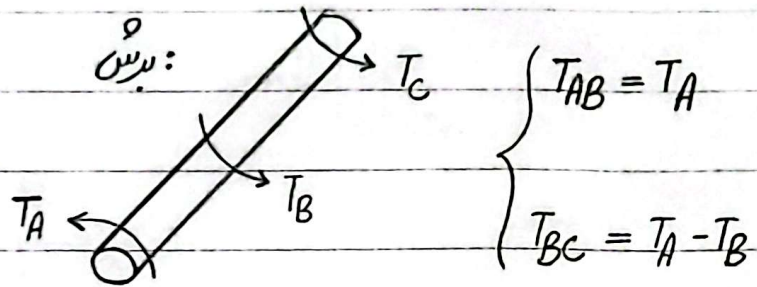
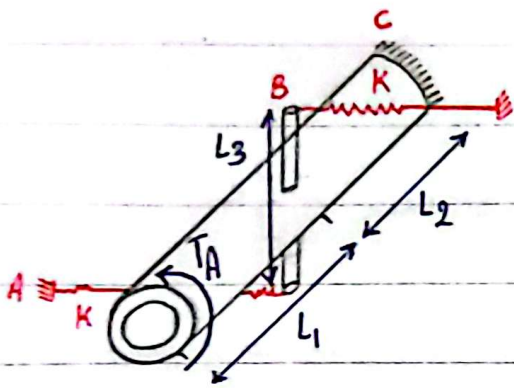
$$\textcircled{2} \quad T_{st} = \frac{G_{st} J_{st}}{G_{Al} J_{Al}} T_{Al}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow T_{st}, T_{Al} \text{ برست می آید} \Rightarrow \begin{cases} T_{\max}(st) = \frac{T_{st} d_2/2}{J_{st}} = 15.4 \text{ MPa} \checkmark \\ T_{\max}(Al) = \frac{T_{Al} d_1/2}{J_{Al}} = 11.4 \text{ MPa} \checkmark \end{cases}$$

$$\theta = \frac{T_{st} L}{G_{st} J_{st}} = 8.8 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.5^\circ \checkmark$$

$$T_{\max}(Al) \neq T_{\min}(st): \text{نمونه خطی هم}$$

$\theta_A = ?$ (مسئله)



$$u = \theta_B \frac{L_3}{2} \Rightarrow \text{نسبت نیرو: } F_s = Ku$$

$$B) \text{ مساله } \Rightarrow T_B = 2(F_s \frac{L_3}{2}) = F_s L_3$$

$$\Rightarrow T_B = K \theta_B \frac{L_3}{2} (\frac{L_3}{2}) \Rightarrow T_B = K \frac{L_3^2}{2} \theta_B \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{B-C} = \theta_B - \theta_C &= \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ} = \frac{(T_A - T_B) L_2}{GJ} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &\text{جابجایی} \\ &\Rightarrow \text{نسبت مساله } \theta_B \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{A-B} = \theta_A - \theta_B &= \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ} = \frac{T_A L_1}{GJ} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &\text{جابجایی } \theta_B \\ &\Rightarrow \text{نسبت مساله } \theta_A \end{aligned}$$

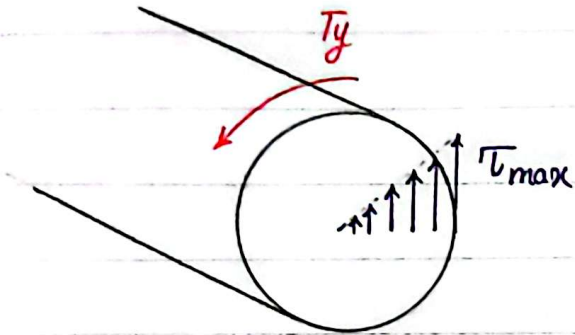
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{T_A}{GJ} \left[\frac{L_2^2 GJ}{1 + K L_3^2 L_2} + L_1 \right]$$

نسبت مهم:

$$\left\{ \begin{aligned} K = 0 &\Rightarrow \theta_A = \frac{T_A (L_1 + L_2)}{GJ} \Rightarrow \text{انفار مسله ای به طول کلی } L_1 + L_2 \text{ داریم} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} K = \infty &\Rightarrow \theta_A = \frac{T_A L_1}{GJ} \Rightarrow \text{انفار نقطه B را ثابت کرده ایم و مسله به طول } L_1 \end{aligned} \right.$$

بیعیس الاستیک - پلاستیک



$$\tau_{allowable} = \frac{\sigma_y}{2}$$

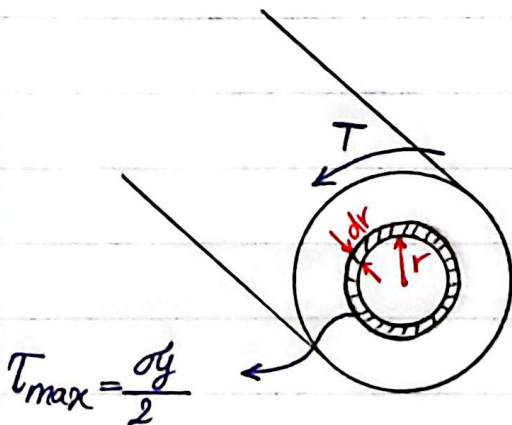
از ناحیه بیرونی که به مقدار مجاز رسید، تسلیم شده

و تغییر فرم پلاستیک میدهد (زیرا بیشترین تنش روی سطح ماده است).

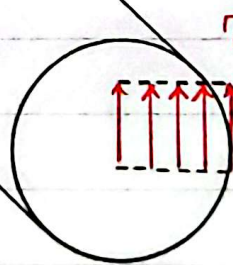
ما لزیم مقدار تساوی که یک شفت میتواند قبل از تسلیم تحمل کند با فرض رفتار الاستیک - پلاستیک

$$\text{تور: } \tau = \frac{T r}{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{T r}{\pi/2 R^4} \Rightarrow T_{max} = \pi/4 R^3 \sigma_y$$

$$\text{دائیه: } T_{max} = \int_0^R \tau_{max} (2\pi r dr) r = \pi \sigma_y \int_0^R r^2 dr \Rightarrow T_{max} = \pi/3 R^3 \sigma_y$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2}$$

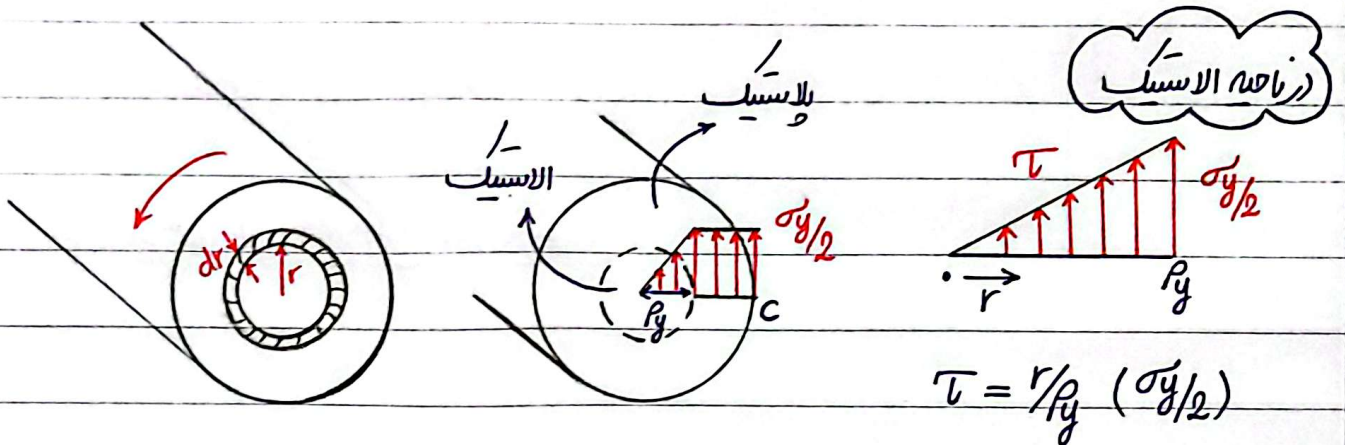


$$\tau_{max} = \sigma_y / 2$$

حالتی که کل سطح مقطع
به تسلیم رسیده باشد

پس یک شفت 32% تساوی بیعیس بیشتری تا قبل از تسلیم تحمل میکند.

مقدار T با ρ_y و σ_y مستقیماً از سطح مقطع به تسلیم بست ($T \propto \rho_y$) :



$$T = \int_0^{\rho_y} \tau (2\pi r dr) r + \int_{\rho_y}^c \sigma_y/2 (2\pi r) dr = \frac{\sigma_y \pi}{\rho_y} \int_0^{\rho_y} r^3 dr + \sigma_y \pi \int_{\rho_y}^c r^2 dr$$

(ناحیه الاستیک) (ناحیه پلاستیک)

$$T = (\sigma_y \pi \rho_y^3)/4 + (\sigma_y (c^3 - \rho_y^3))/3 \rightarrow T = \frac{\sigma_y \pi c^3}{3} \left(1 - \frac{\rho_y^3}{4c^3} \right)$$

رابطه تسلیم پلاستیکی اعمالی با تغییر زاویه : ($T \propto \theta$)

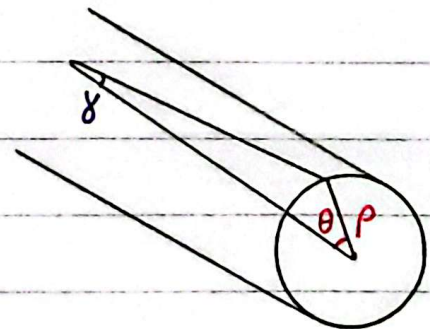
$$\delta L = \rho \theta \rightarrow \delta = \frac{\rho \theta}{L}$$

$$\text{تسلیم شدن در ناحیه الاستیک} \Rightarrow \delta_y = \frac{c \theta_y}{L} \quad (1)$$

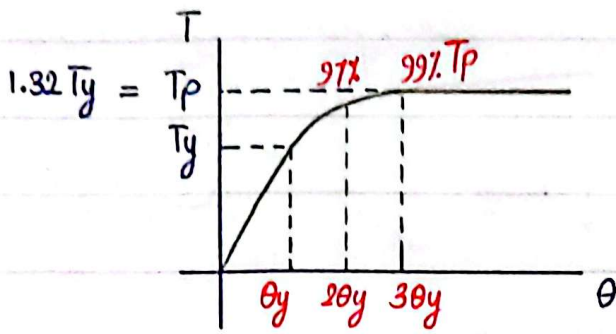
$$\text{تسلیم شدن در ناحیه پلاستیک} \Rightarrow \delta_y = \frac{\rho_y \theta}{L} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \rightarrow c \theta_y = \rho_y \theta \rightarrow \frac{\rho_y}{c} = \frac{\theta_y}{\theta}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\sigma_y \pi c^3}{3} \left(1 - \frac{\theta_y^3}{4\theta^3} \right)$$

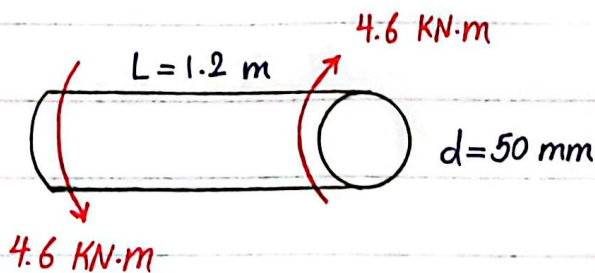


سفت و انعطاف :



مثلاً اگر با ۵ درصد حریف تسلیم شوی،

با ۱۵ درصد حریف کل سطح مقطع fail می‌شود.



$$\tau_{\text{allowable}} = 150 \text{ MPa}$$

$$G = 77 \text{ GPa}$$

$$\rho_y = ? \quad \theta = ?$$

$$T = \frac{\sigma_y \pi R^3}{3} \left(1 - \frac{\rho_y^3}{4R^3}\right) \Rightarrow 4.6 \times 10^3 = \frac{300 \times 10^6 \pi (25 \times 10^{-3})^3}{3} \left(1 - \frac{\rho_y^3}{4(25 \times 10^{-3})^3}\right)$$

$$\tau_{\text{allowable}} = \sigma_y / 2 \Rightarrow \sigma_y = 2 \times 150 = 300 \quad ; \quad \rho_y = 15.8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\tau_{\text{allowable}} = \frac{T_y R}{J} \Rightarrow T_y \checkmark \Rightarrow \theta_y = \frac{T_y L}{G J} \Rightarrow \theta_y \checkmark$$

$$\frac{\rho_y}{R} = \frac{\theta_y}{\theta} \longrightarrow \theta = \theta_y \frac{R}{\rho_y} \Rightarrow \theta = 148.3 \times 10^{-3} \text{ rad} = 8.5^\circ$$

نکته: در سطح مقطع مندر را برای، تنش برشی عمود بر سطح نیست!

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{GJ^*} ; J^* = C_1 ab^2 \longrightarrow$$

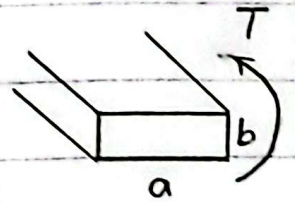
$$\theta = \frac{TL}{GC_1 ab^2}$$

سطح مقطع
مستطیلی

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{T}{J^{**}} ; J^{**} = C_2 ab^3 \longrightarrow$$

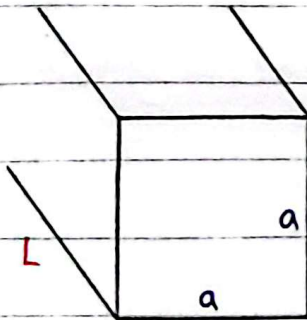
$$\tau_{max} = \frac{T}{C_2 ab^3}$$

a/b	1	1.5	2	3	5	10	∞
C_1	0.208	0.231	0.246	0.267	0.291	0.312	0.333
C_2	0.141	0.196	0.229	0.263	0.291	0.312	0.333



خیزش را با مساحت مقطع نلیمان داریم. کدام سطح مقطع از نظر برشی بهتر است؟

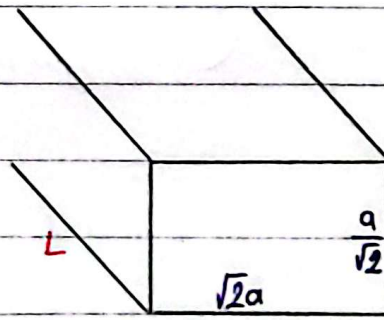
τ_{max} کمتر و $K = \frac{T}{\theta}$ (نسبت برشی نلیمان) (نسبت T محلی نلیمان) (ست)



« A »

$$a/b = 1$$

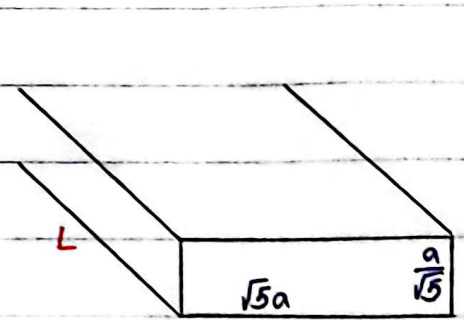
$$\begin{cases} C_1 = 0.208 \\ C_2 = 0.141 \end{cases}$$



« B »

$$a/b = 2$$

$$\begin{cases} C_1 = 0.246 \\ C_2 = 0.229 \end{cases}$$



« C »

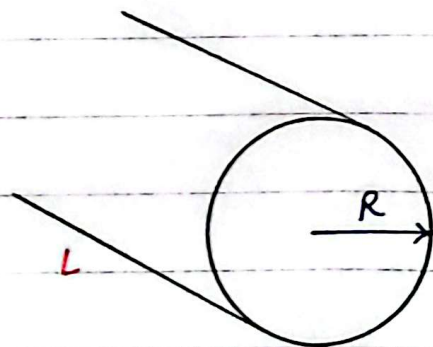
$$a/b = 5$$

$$\begin{cases} C_1 = 0.291 \\ C_2 = 0.291 \end{cases}$$

$$A: \begin{cases} \tau_{max} = T/c_1 ab^2 \longrightarrow \tau_{max} = 4.81 \ T/a^3 \\ \theta = \pi L / G c_2 ab^3 \longrightarrow \frac{T}{\theta} = 0.14 \frac{Ga^4}{L} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \tau_{max} = T/c_1 ab^2 \longrightarrow \tau_{max} = 5.74 \ T/a^3 \\ \theta = \pi L / G c_2 ab^3 \longrightarrow \frac{T}{\theta} = 0.123 \frac{Ga^4}{L} \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} \tau_{max} = T/c_1 ob^2 \longrightarrow \tau_{max} = 7.6 \ T/a^3 \\ \theta = \pi L / G c_2 ab^3 \longrightarrow \frac{T}{\theta} = 0.058 \frac{Ga^4}{L} \end{cases}$$

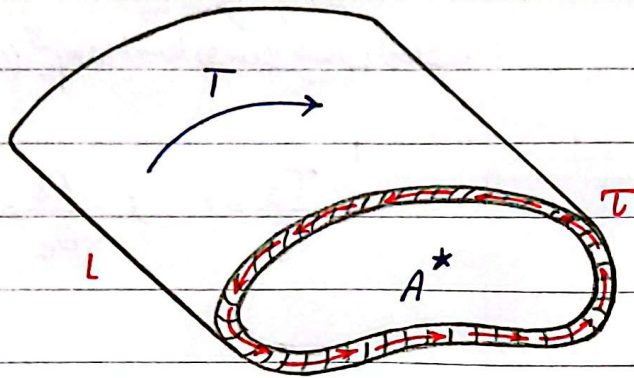


$$\pi R^2 = a^2 \longrightarrow R = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

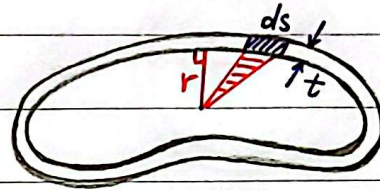
(مساحت مقطع دایره مانند تیرهای متبلی دارد)

$$\begin{cases} \tau_{max} = \frac{T r}{J} = \frac{T R}{\pi/2 R^4} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2T}{\pi (\frac{a}{\sqrt{\pi}})^3} \longrightarrow \tau_{max} = 3.5 \ T/a^3 \\ \theta = \frac{\pi L}{G J} = \frac{\pi L}{G \pi/2 R^4} = \frac{\pi L}{G \pi/2 (\frac{a}{\sqrt{\pi}})^4} \longrightarrow \frac{T}{\theta} = a/6 \frac{Ga^4}{L} \end{cases}$$

سطح مقطع دایره از بقیه بهتر است. چون تنش برشی کمتر و سختی بیشتری دارد.



بیجیس مقاطع جدار نازک



(تفرانسبی)

$$A = \frac{1}{2} r ds \rightarrow A^* = \int dA = \int \frac{1}{2} r ds \rightarrow \int r ds = 2A^*$$

$$T = \int dT = \int F \cdot r = \int T t ds r = T t \int r ds = T t 2A^* \rightarrow T t = \frac{T}{2A^*}$$

نکته: مقدار $T t$ در مقاطع جدار نازک یکسان است. (حاصل ضرب تنش در ضخامت)

رابطه T و θ در مقاطع جدار نازک: ← اثبات مهم نیست!

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } + \text{ (ضخامت) در سطح مقطع ثابت نباشد} \\ \theta = \frac{TL}{4GA^{*2}} \int \frac{ds}{t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } + \text{ (ضخامت) در کل سطح مقطع ثابت باشد} \\ \theta = \frac{TL S}{4GA^{*2} t} \end{array} \right.$$

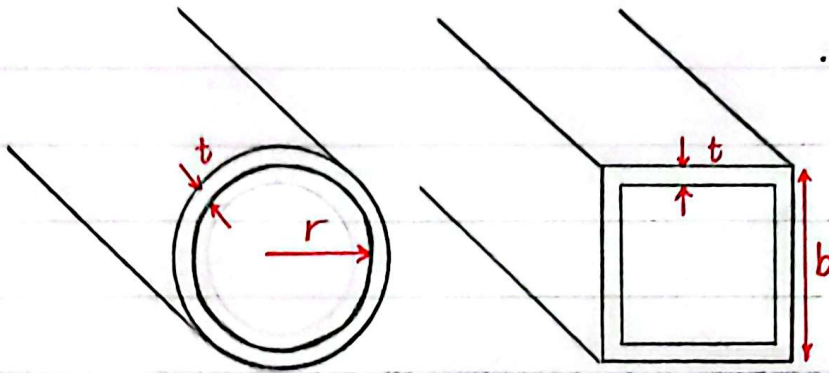
S: مساحت

$$T t = \frac{T}{2A^*}$$

$$\theta = \frac{TL}{4GA^{*2}} \int \frac{ds}{t}$$

فرمول های حقیقی:

مسئله: یک جسم ماده (استفاده شده) یکسان است.



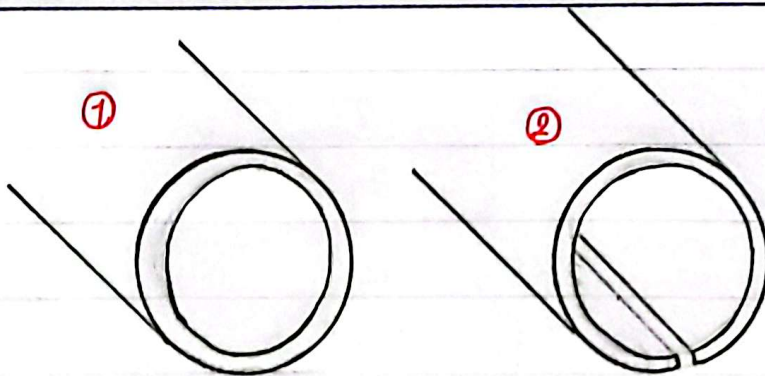
$$\frac{\tau_s}{\tau_c} = ? ; \frac{\theta_s}{\theta_c} = ?$$

$$2\pi r t = 4b t \longrightarrow b = (\pi/2)r \quad \tau_s t_s = \frac{T}{2A_s^*} ; \tau_c t_c = \frac{T}{2A_c^*}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_s}{\tau_c} = \frac{A_c^*}{A_s^*} = \frac{\pi r^2}{b^2} = \frac{\pi r^2}{(\pi/2 r)^2} = \frac{4}{\pi} = 1.3 \quad \checkmark$$

$$\theta_s = \frac{TL S_s}{4GA_s^{*2} t} ; \theta_c = \frac{TL S_c}{4GA_c^{*2} t} \Rightarrow \frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{S_s}{S_c} \times \left(\frac{A_c^*}{A_s^*} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{4b}{2\pi r} \times \left(\frac{\pi r^2}{b^2} \right)^2 \xrightarrow{b = \pi/2 r} \frac{\theta_s}{\theta_c} = 1.62 \quad \checkmark$$



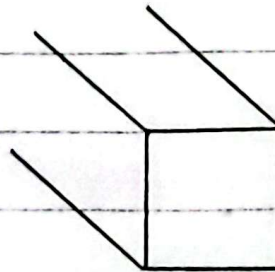
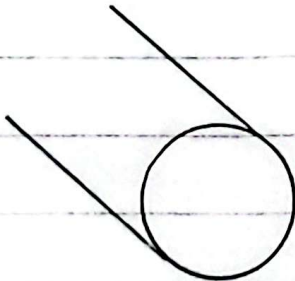
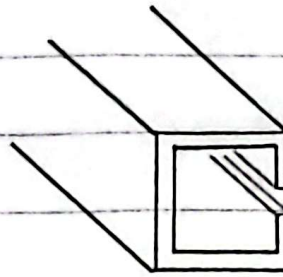
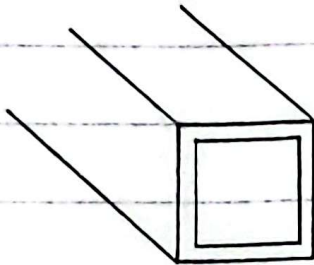
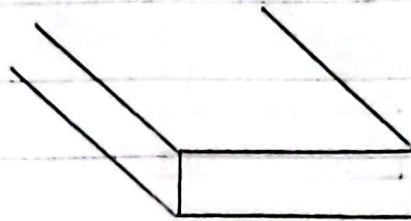
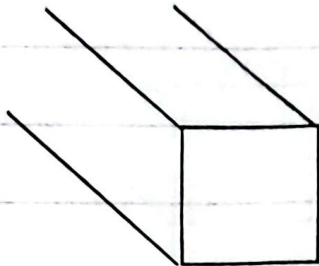
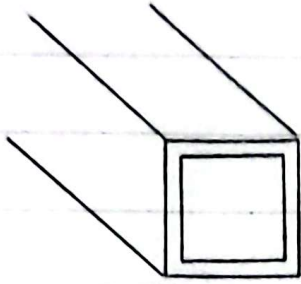
① خیلی بهتر است؛ چون در رابطه
t نسبت به r خیلی کوچک است.

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{T}{2tA^*} = \frac{T}{2t\pi r^2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t}{3r}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{T}{c_1 a b^2} \xrightarrow{c_1 = 1/3} \tau_2 = \frac{T}{\frac{2}{3}\pi r t^2} \quad [a = 2\pi r \quad b = t] \end{aligned} \right.$$

حفاظت های مهم:



stiffness

% 100

% 62

% 47

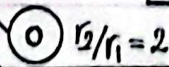
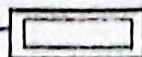
% 22

% 13

% 12

% 9.7

% 4.9



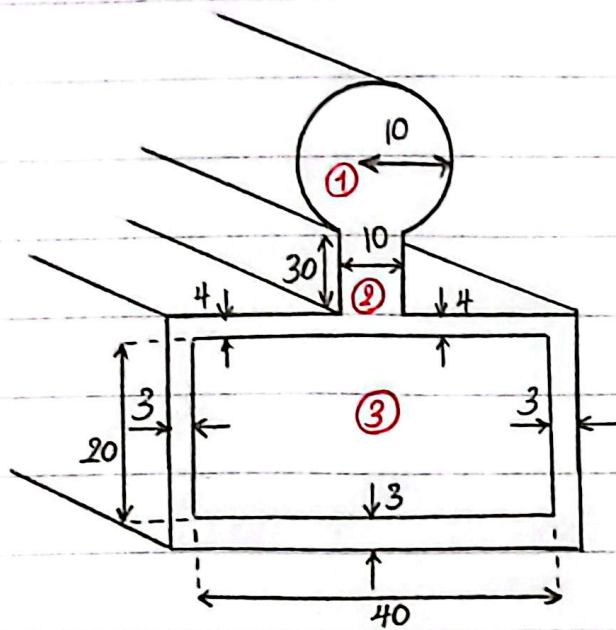
$r_2/r_1 = 2$



با فرض ثابت بودن مقدار ماده مصرفی:

$$\frac{d_o}{d_i} = \frac{8}{7}$$

مسالہ (مادی) (اعداد در مقیاس mm هستند)



$$T = 300 \text{ N.m}$$

$$T_{max} = ?$$

$$K_{eq} = ?$$

روند حل:

$$\text{توازن} \longrightarrow T_1 + T_2 + T_3 = T = 300$$

$$\text{تساوی} \longrightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$$

$$\text{تعریف} \longrightarrow \theta_{\text{دایره}} = \frac{T_1 L}{GJ} ; \theta_{\text{مستطی}} = \frac{T_2}{C_2 G a b^3} ; \theta_{\text{مستطی}} = \frac{T_3}{4GA \star^2} \int \frac{ds}{t}$$

سر معادله در سه مجهول T_1 ، T_2 ، T_3 نسبت می‌دهیم

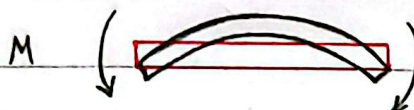
$$K_{eq} = \frac{T}{\theta} \longrightarrow K_{eq} = K_{eq1} + K_{eq2} + K_{eq3}$$

تقریرات:

خمش مثبت: تارهای بالا کاهش طول دارد (تحت تنش منفی)

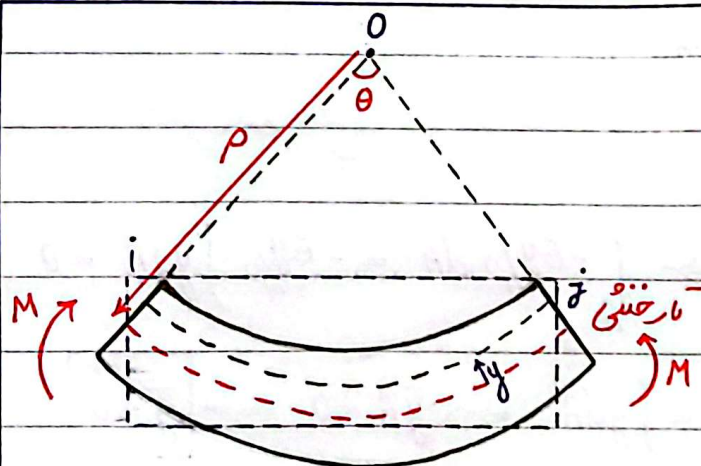


تارهای پایین افزایش طول پیدا میکنند (تحت تنش مثبت)



خمش منفی: تارهای بالا افزایش، تارهای پایین کاهش طول.

تنش و کرنش در این همان خمشی M



تقریرات: y نسبت بالا مثبت است.

y نسبت پایین منفی است.

$$(L'_{ij} = \rho \theta = \text{طول اولیه تار خنثی}) \quad \text{و} \quad (L'_{ij} = (\rho - y) \theta = \text{طول ثانویه تار خنثی})$$

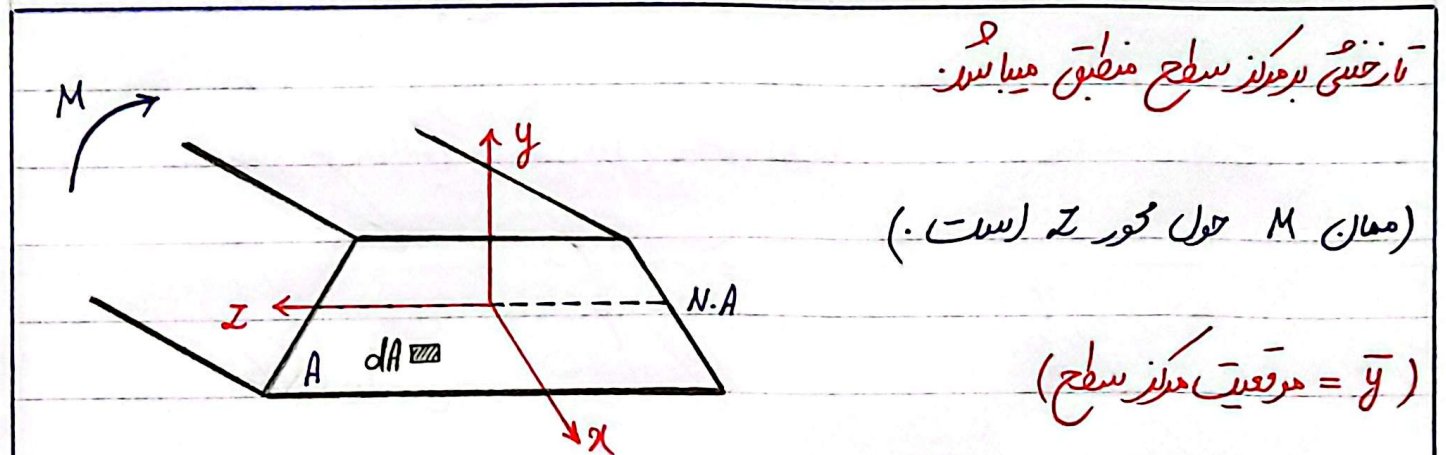
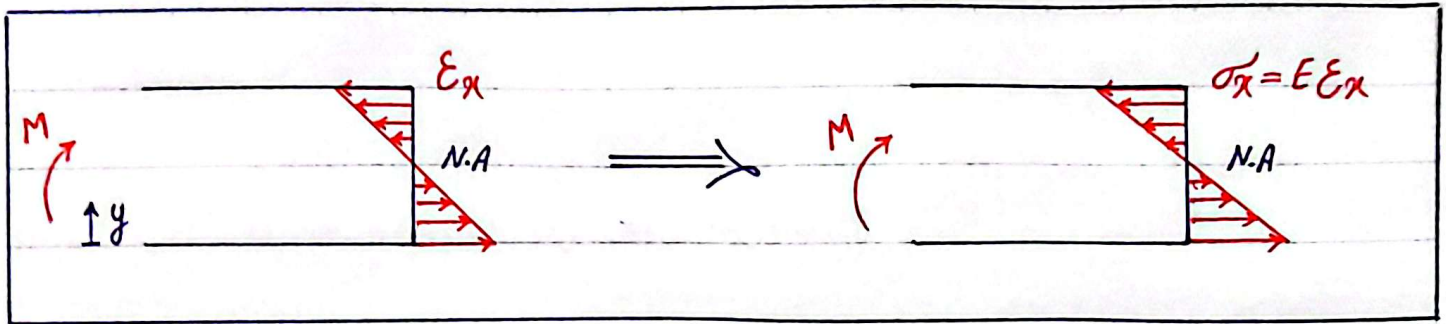
$$\delta_{ij} = L'_{ij} - L_{ij} = (\rho - y) \theta - \rho \theta = -y \theta$$

$$\epsilon = \frac{\delta_{ij}}{L_{ij}} = \frac{-y \theta}{\rho \theta} \rightarrow \epsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

$$\sigma_x = E \epsilon_x = \frac{-E y}{\rho}$$

تار خنثی = N.A

مبدأ مقدمات (برای سبای y روی تار خنثی)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_A -E y / \rho dA = -E / \rho \int y dA = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_A -E y / \rho dA = -E / \rho \int y dA = 0$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \Rightarrow \bar{y} A = \int y dA \Rightarrow \bar{y} A = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 0}$$

رابطه ممان خمشی M و تنش σ:

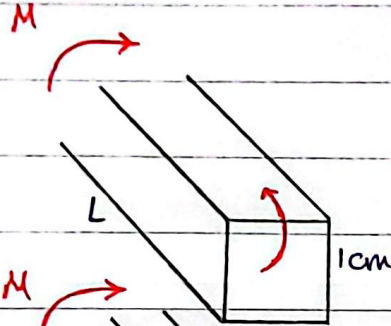
$$\sum M = 0 \Rightarrow M = \int_A -y \sigma_x dA = \int_A -y (-E y / \rho) dA = E / \rho \int_A y^2 dA$$

$$\Rightarrow M = \frac{E I_z}{\rho} \quad ; \quad \sigma = -E y / \rho$$

$$M / I = E / \rho \longrightarrow \boxed{\sigma = \frac{-M y}{I}}$$

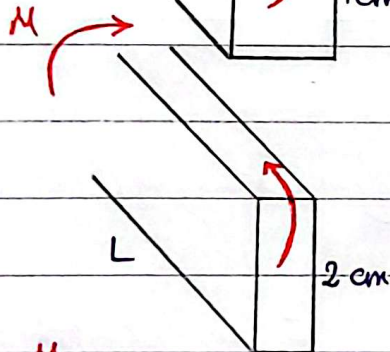
مثال: میل‌ای فولادی با سطح مقطع مربعی به ضلع 1 cm ، $E=210\text{ GPa}$ ، $\sigma_y=250\text{ MPa}$ می‌باشد.

$\rho = ?$ در هیچ نقطه‌ای از جسم به تسلیم نرسد؟

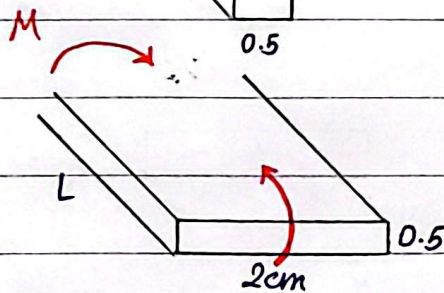


$$\sigma = \frac{-Ey}{\rho} \rightarrow 250 \times 10^6 = \frac{210 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-2}}{\rho}$$

$$\rightarrow \rho = 4.2\text{ m}$$



$$250 \times 10^6 = \frac{210 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-2}}{\rho} \rightarrow \rho = 8.4\text{ m}$$



$$250 \times 10^6 = \frac{210 \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-2}}{\rho} \rightarrow \rho = 2.1\text{ m}$$

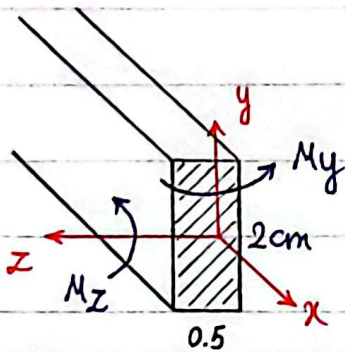
نکته مهم سوال :

هرچه ρ کوچک‌تر باشد؛ یعنی شعاع دایره کوچک‌تر است و جسم را بیشتر می‌توان خم کرد؛

در این سوال حالت سوم که ρ کمتری دارد ($\rho = 2.1\text{ m}$) بیشتر می‌تواند خم شود و در نتیجه،

زیادتر به تسلیم می‌رسد.

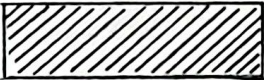
ممان مقدار ممان M_z و M_y لازم برای انحراف شعاع انحنای تیر (در دو حالت یکسان شود).



$$M_z = 16 M_y$$

$$M = \frac{EI}{\rho} \Rightarrow \frac{M_z}{M_y} = \frac{I_z}{I_y} = \frac{\frac{1}{12}(0.5)(2)^3}{\frac{1}{12}(2)(0.5)^3} = 16$$

A



در هر دو حالت ها مساحت سطح مقطع ثابت است.

B

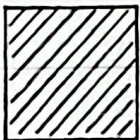


تیرهای D و E
مقاومت بیشتری دارند

M_z : ممان حول محور z

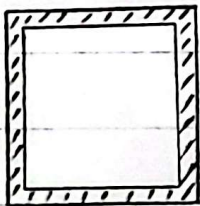
M_y : ممان حول محور y

C

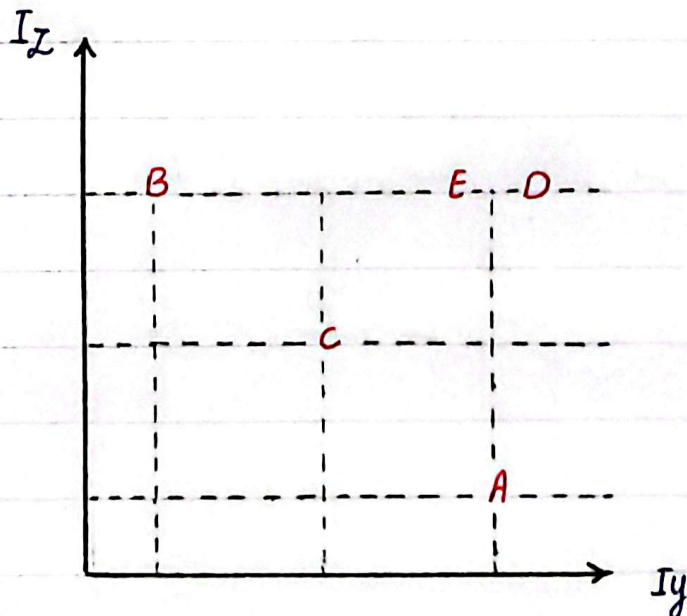
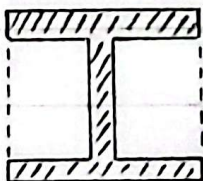


(مانند شکل بالا در ممان زلزله شده)

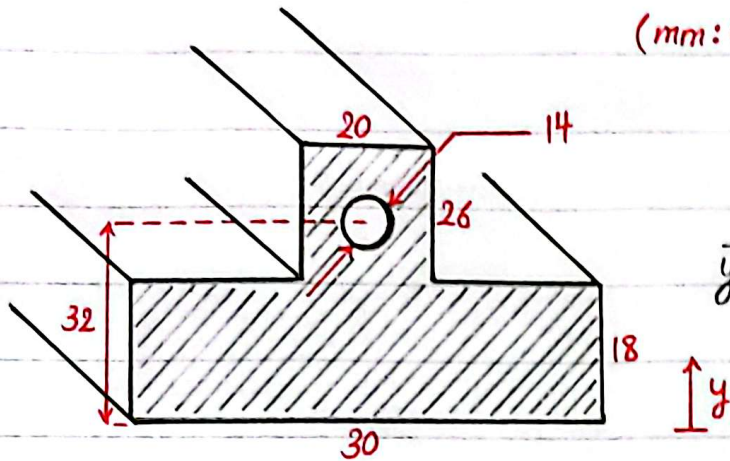
D



E



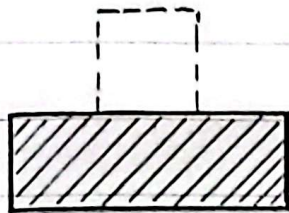
(mm: واحد) $\sigma_{max} = ?$; $M_x = 1 \text{ KN}\cdot\text{m}$ (مکان)



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \rightarrow \int y dA = \bar{y} A$$

(A)

سنگین بال



A_1

+



A_2

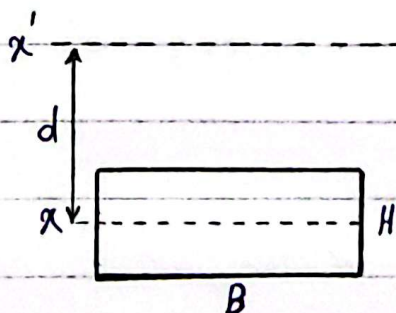
-



A_3

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 17.72 \text{ mm}}$$

$$\bar{y}_1 = 9, A_1 = 18(30) ; \bar{y}_2 = 31, A_2 = 26(20) ; \bar{y}_3 = 32, A_3 = \pi(7)^2$$



اصل انتقال مکان انرسی:

$$I_x = \frac{BH^3}{12}$$

$$\boxed{I_{x'} = \frac{BH^3}{12} + Ad^2}$$

اصل انتقال مکان انرسی برای بدست آوردن مکان انرسی نسبت به یک محور (مکان) مسطح

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA - \int_{A_3} y^2 dA$$

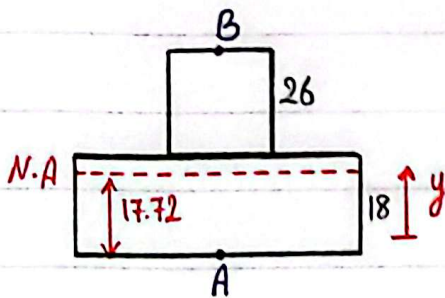
(استفاده از انتقال معادله انیرسی) $\longleftrightarrow$ (معادله انیرسی سطح نسبت به مرکز ثقل کل سطح A)

$$\Rightarrow I = (I_{o1} + A_1 d_1^2) + (I_{o2} + A_2 d_2^2) - (I_{o3} + A_3 d_3^2)$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{30(18)^3}{12} + (30 \times 18)(8.72)^2 \right] + 1.210 \times 10^5 - 3.33 \times 10^4$$

$$\Rightarrow I = 1.434 \times 10^5 \text{ (mm}^4\text{)}$$

$$\sigma_{max} = \frac{-M y_{max}}{I}$$



$$\begin{cases} y_A = 17.72 \\ y_B = 26.28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{max} = y_B = 26.28 \text{ (mm)}$$

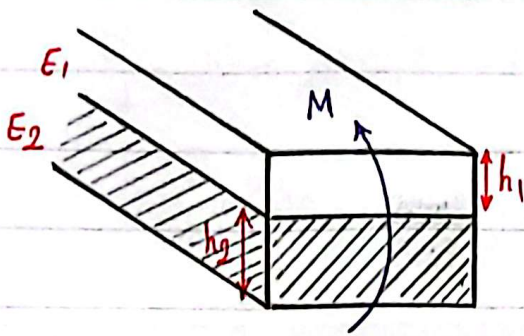
یعنی σ_{max} در نقطه B اتفاق می افتد

$$\sigma_{max} = \frac{-M y_{max}}{I} = \frac{-1 \times 10^3 (26.28 \times 10^{-3})}{(1.434 \times 10^5) \times 10^{-12}} \Rightarrow \sigma_{max} = -262.28 \text{ MPa}$$

نکته منفرد بعد: خمس مقاطع هندسه ای:

مساحت و معادله انیرسی سطح مقطع ماده با E بالاتر از n برابر در نظر بگیرد

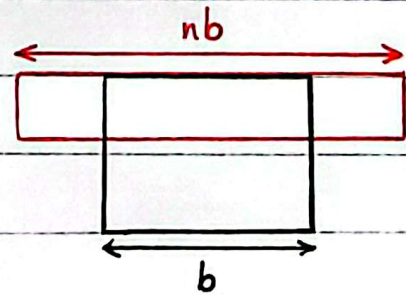
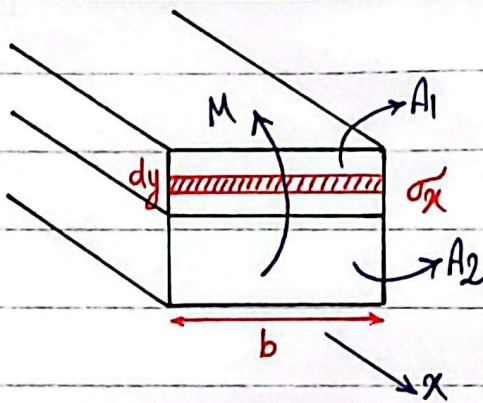
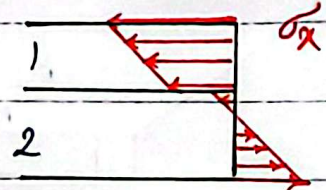
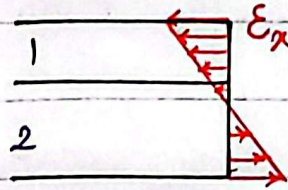
خمش در مقاطع چند ماده ای:



$$E_1 > E_2$$

$$\epsilon_x = -y/\rho \quad ; \quad \sigma_x = E \epsilon_x = -E y/\rho$$

نسای نعل:

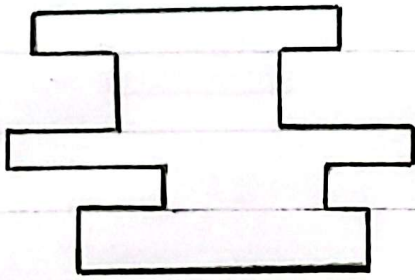


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \sigma_x dA + \int_{A_2} \sigma_x dA = 0 \quad (dA = b dy)$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} \sigma_x b dy + \int_{A_2} \sigma_x b dy = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \frac{-E_1 y}{\rho} b dy + \int_{A_2} \frac{-E_2 y}{\rho} b dy = 0$$

$$E_1/E_2 = n \Rightarrow \int y/\rho E_2 n b dy + \int y/\rho E_2 b dy = 0$$

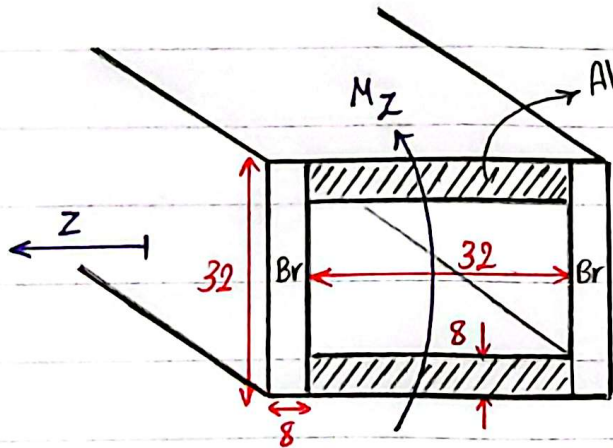
$$\Rightarrow \frac{E_2}{\rho} \left[\int_{A_1} y \underbrace{nb dy}_{dA_1} + \int_{A_2} y \underbrace{b dy}_{dA} \right] = 0 \Rightarrow \frac{E_2}{\rho} [I_1 + I_{A_2}] = 0$$



$$\sigma_{x2} = \frac{-My}{I}$$

$$\sigma_{x1} = (n) \frac{-My}{I}$$

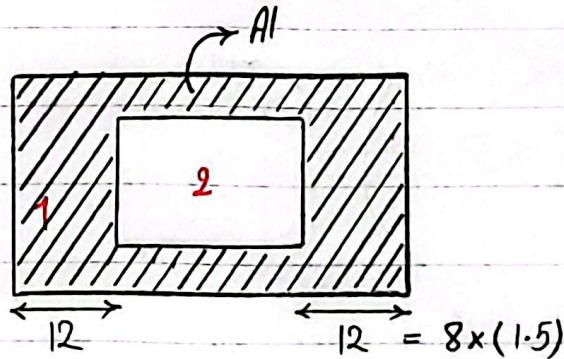
$$\sigma_{xi} = \left(\frac{E_i}{E_{min}} \right) \left(\frac{-My}{I} \right)$$



$$\begin{cases} E_{Al} = 70 \text{ GPa} ; E_{Br} = 105 \text{ GPa} \quad (\text{والم}) \\ \sigma_{yAl} = 100 \text{ MPa} ; \sigma_{yBr} = 160 \text{ MPa} \end{cases}$$

(mm = المليمتر) $M_{allowable}?$

$$\frac{E_{Br}}{E_{Al}} = \frac{105}{70} = 1.5$$



$$I_{total} = I_1 - I_2 = 141.995 \times 10^{-9} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\sigma_{max(Al)} = \frac{-My}{I} \Rightarrow 100 \times 10^6 = \frac{M(16 \times 10^{-3})}{141.995 \times 10^{-9}} \Rightarrow M_{Al} = 887.47 \text{ (N.m)}$$

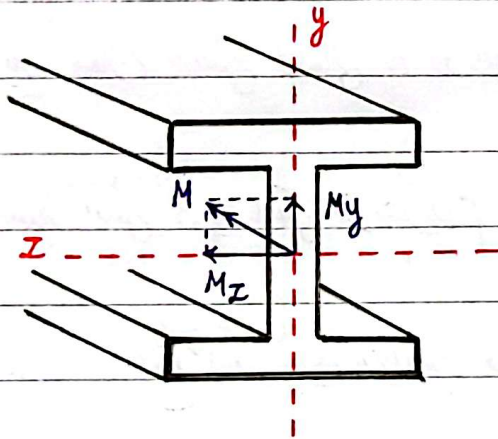
$$\sigma_{max(Br)} = 1.5 \frac{-My}{I} \Rightarrow 160 \times 10^6 = \frac{-1.5 M(16 \times 10^{-3})}{141.995 \times 10^{-9}} \Rightarrow M_{Br} = 946.63$$

$$M_{allowable} = 887.47 \text{ N.m}$$

ممان کمتر مجاز است. $\Leftarrow$

محورین یا متقارن

در حالت ۱: سطح مقطع متقارن نباشد. ۲- محاسبه در غیر صفحه تقارن اعمال شوند

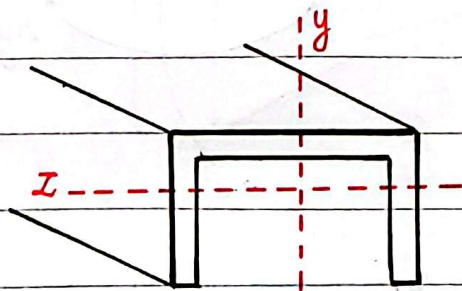


اگر محاسبه در غیر از صفحه تقارن اعمال شده باشد؛

آن را به دو مؤلفه‌ی عمود بر هم تغییر می‌دهیم.

۱- باید محاسبه حاصل را به محورها اصلی تغییر کنیم تا محاسبه محاسبه در جهت تر باشد

۲- اگر سطح مقطع مایل یا (و محور تقارن راست)، قطعاً محورها اصلی بر آن‌ها منطبق هستند.



خط چین‌های قوس‌دار وسط، محورها تقارن و اصلی هستند

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

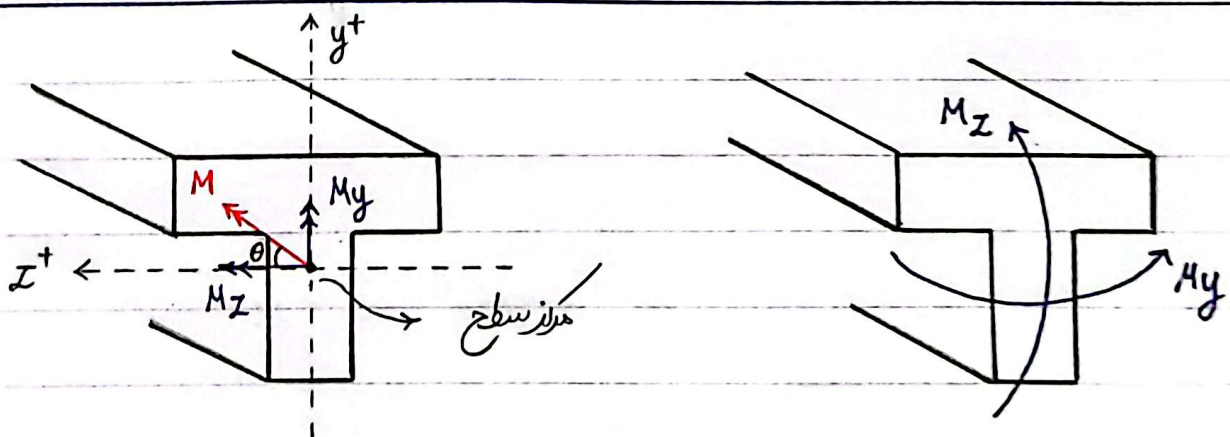
نکته: اگر شکل متقارن نبود:

$$I_{xy} = \int xy dA \leftarrow \text{محاسبه حاصل ضرب}$$

۳- هر جا که $I_{xy} = 0$ شود، محورها اصلی آن سطح مقطع خواهد بود.

روش حل مسائل خمشی نامتقارن:

1. سیکل کردن محوهای اصلی سطح مقطع (از مرکز سطح لژیست و منطبق بر محوهای تقارن سطح هستند)
2. تجزیه همان خمشی اعمالی به دو مولفه در راستای محوهای اصلی.
3. محاسبه تنش محوری ناشی از هر کدام از همان های خمشی تجزیه شده.
4. استفاده از جمع آثار برای محاسبه مقدار تنش در هر نقطه از سطح مقطع.



$$\begin{cases} M_z = M \cos \theta \longrightarrow \sigma_x - M_z = -\frac{M_z y}{I_z} \\ M_y = M \sin \theta \longrightarrow \sigma_x - M_y = +\frac{M_y z}{I_y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}}$$

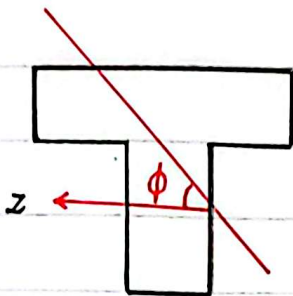
علامت $\sigma_x - M_z$: با اعمال M_z ، y^+ تحت فشار و y^- تحت کشش ← علامت منفی

علامت $\sigma_x - M_y$: با اعمال M_y ، z^+ تحت کشش و z^- تحت فشار ← علامت مثبت

سایکرون موقعیت بار خنثی: ← در تار خنثی (N.A) تنش محوری منفی است.

$$\sigma_x = 0 \rightarrow \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \rightarrow \frac{-M \cos \theta y}{I_z} + \frac{M \sin \theta z}{I_y} = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta z \rightarrow y = m z \quad \text{رابطه خطی با z دارد.}$$



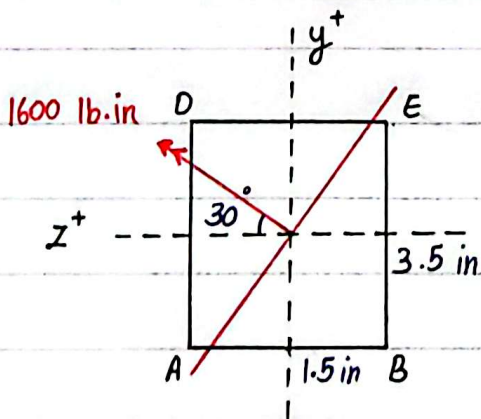
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

سایکرون زاویه تار خنثی:

$$\phi = \text{Arc tan} \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right)$$

ϕ : زاویه تار خنثی نسبت به محور z

θ : زاویه اعمال اعمالی نسبت به محور z



$$\sigma_{x-\max} = ?$$

$$\phi = ?$$

مطلوبه

$$M_z = M \cos 30 = 1600 \cos 30 = 1386 \text{ lb.in}$$

$$M_y = M \sin 30 = 1600 \sin 30 = 800 \text{ lb.in}$$

$$I_y = \frac{(3.5)(1.5)^3}{12} = 0.9844$$

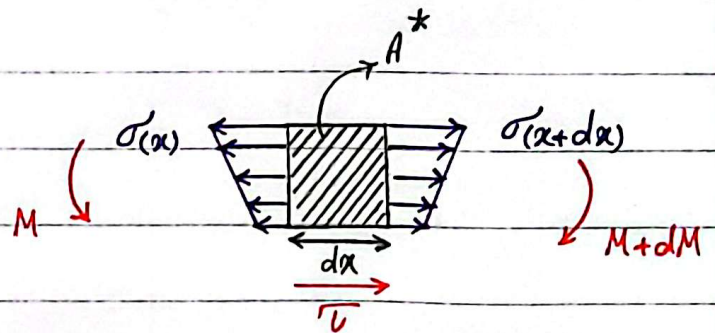
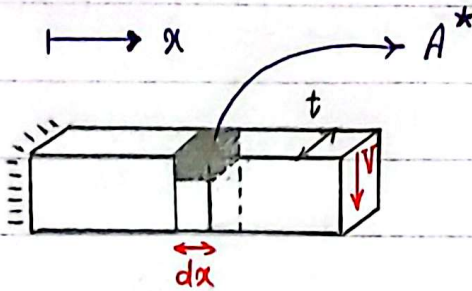
$$I_z = \frac{(1.5)(3.5)^3}{12} = 5.359$$

$$\sigma_{x-E} = -1062 \text{ (Psi)}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \rightarrow \sigma_{x-A} = \frac{-1386(-3.5/2)}{5.359} + \frac{800(1.5/2)}{0.9844} = 1062 \text{ (Psi)} \quad \text{max}$$

$$\phi = \text{Arctan} \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) = \text{Arctan} \left(\frac{5.359}{0.9844} \tan 30 \right) \Rightarrow \phi = 72.4^\circ$$

تنش برشی در تیرها



[τ : تنش برشی حاصل از نیروی برشی V]

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow - \int_{A^*} \frac{My}{I} dA + \int_{A^*} \frac{-(M+dM)y}{I} dA + \tau t dx = 0$$

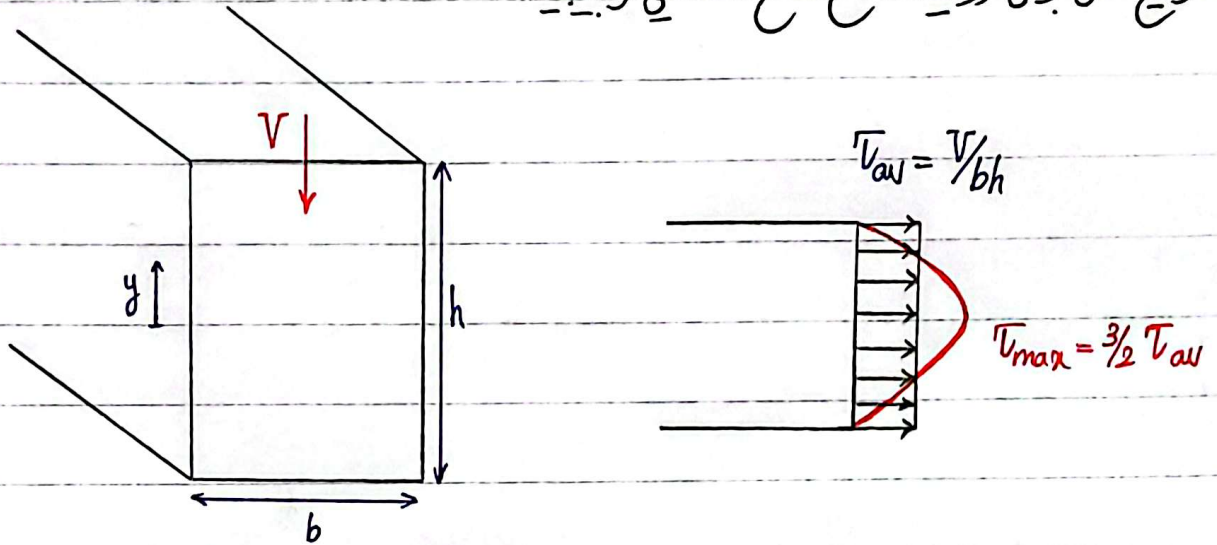
$$\longrightarrow \tau t dx = \int_{A^*} \frac{dM}{I} y dA \longrightarrow \tau t = \int_{A^*} \frac{dM}{dx} \frac{y}{I} dA$$

$$(از تساوی) \longrightarrow \frac{dM}{dx} = V \longrightarrow \tau = \frac{V}{It} \left(\int_{A^*} y dA \right) \sim \bar{y}_{A^*} A^*$$

$\bar{y}_{A^*}$: فاصله تا خطِ ناحیهِ محورِ ثقلِ تیر (A*) از تا خطِ سطحِ مقطع
 $(\bar{y}_{A^*} A^* = Q)$

$$\longrightarrow \boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

(توزیع تنش برشی در یک سطح مقطع مستطیلی را بیابید)

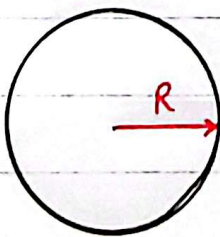


$$Q = A^* \bar{y}_{A^*} = b(h/2 - y) \left[\frac{h/2 - y}{2} + y \right] \Rightarrow \tau = \frac{VQ}{It}$$

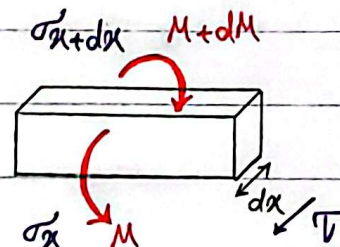
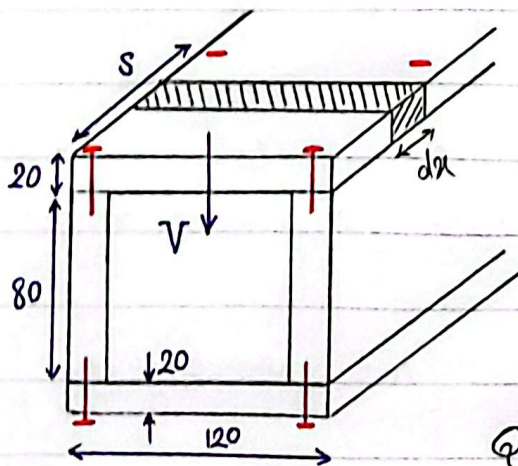
$$\Rightarrow \tau = \frac{V b (h/2 - y) [h/4 + y/2]}{bh^3/12 (b)} = 6 \frac{V}{bh} \left(\frac{1}{4} - (y/h)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{V}{bh} = \tau_{average} \Rightarrow \boxed{\tau = \tau_{av} \left[\frac{3}{2} - 6(y/h)^2 \right]}$$

تمرین: توزیع تنش برشی در یک سطح مقطع دایره‌ای را بیابید.



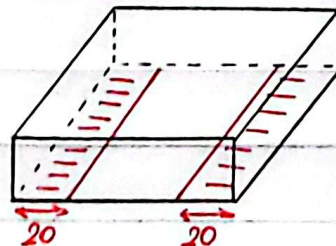
مثال) مقطع تیری مطابق شکل به صورت توکلر مربعی از به هم مفصل کردن قطعات صوبی با منیخ ساخته شده است. اگر فاصله منیخ ها از هم در امتداد طول تیر $S = 30 \text{ mm}$ باشد و نیروی برشی قائم وارد بر تیر $V = 1200 \text{ N}$ باشد، نیروی برشی ابعاد شده در هر منیخ و قطر هر منیخ (در صورتی که مقدار تنش برشی مجاز $\tau_{allowable} = 145 \text{ MPa}$ باشد را بیابید. (واحد ها به mm)



$$Q = A^* \bar{y}_A^* = (120 \times 20)(60 - 10) = 120000 \text{ mm}^3$$



$$\Rightarrow I = I_{\text{مربع بزرگ}} - I_{\text{مربع کوچک}} = \frac{(120)^4 - (80)^4}{12} = 13.87 \times 10^6$$

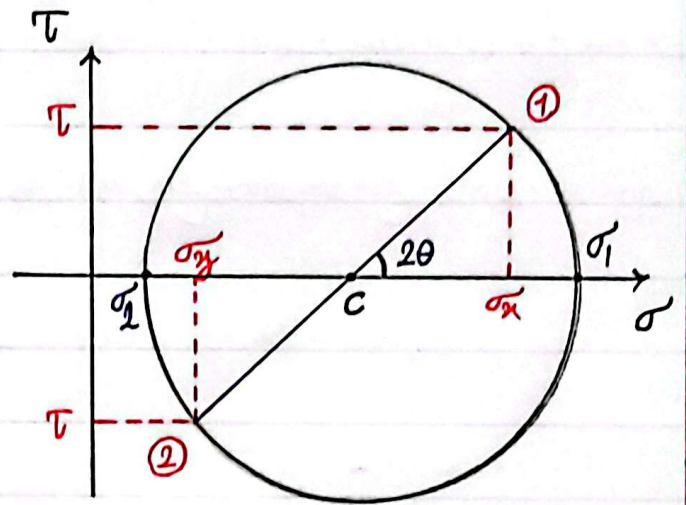
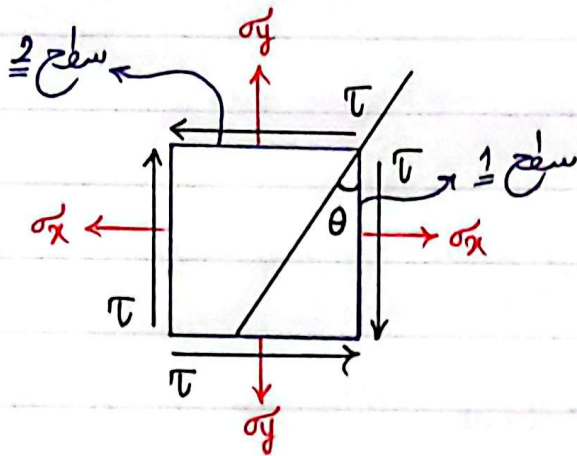


$$\Rightarrow \tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow t = 2(20)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1200 \times 120000 \times 10^{-9}}{13.87 \times 10^6 \times 40 \times 10^{-3}} = 0.259 \text{ MPa} \quad F_{\text{bolt}} = \tau A = 0.259 \times 10^6 \times (30 \times 20 \times 10^{-6})$$

$$\Rightarrow F_{\text{bolt}} = 155.7 \text{ N} \quad \Rightarrow \tau = \frac{F_{\text{bolt}}}{A_{\text{bolt}}} \Rightarrow 145 \times 10^6 = \frac{155.7}{\pi d^2 / 4} \Rightarrow d = 1.2 \text{ mm}$$

تبدیلات تنش ← دایره موهر (Mohr)



[قرار داد: تنشی و ساینده $\oplus$]

قاعده ← زوایای در دایره موهر، ۲ برابر مقدار واقعی (است).

سُباع دایره موهر $[R = \dots]$: مرکز دایره موهر $C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

$$\tau_{max} = R \longrightarrow R^2 = \left(\sigma_x - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right)^2 + \tau^2$$

$$\longrightarrow R = \tau_{max} = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{1/2}$$

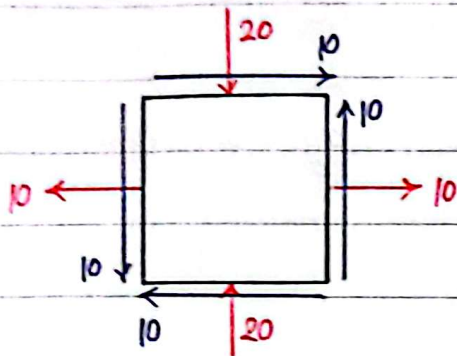
$$\begin{cases} \sigma_1 = C + R \\ \sigma_2 = C - R \end{cases} \quad (\text{جانبی})$$

روش رسم دایره موهر:

تنش‌های حاصل از در سطح را روی مختصات (طبق قرار داد) نشان می‌دهیم. در نقطه را به هم -

وصل کرده؛ جایی که محور س تقاطع می‌شود، مرکز دایره موهر خواهد بود.

مکان ماده تیر باشد بهتر است یا نرم؟



$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{10 - 20}{2} = -5$$

$$R = \tau_{max} = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{1/2}$$

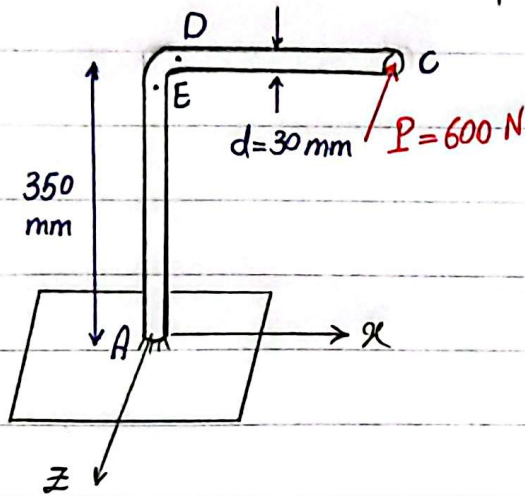
$$\Rightarrow \tau_{max} = \left[\left(\frac{10 - (-20)}{2} \right)^2 + 10^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \tau_{max} = 18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = C + R = -5 + 18 = 13 \text{ MPa} ; \sigma_2^{\max} = C - R = -5 - 18 = -23 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y = 2\tau_{max}) &\longrightarrow \min \sigma_y = 36 && \leftarrow \tau \text{ در سلبت موثر است} \\ \min \sigma_y = 23 &&& \leftarrow \sigma \text{ در سلبت موثر است} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ماده نرم} \\ &\text{ماده تیر} \end{aligned}$$

$\leftarrow$ ماده تیر بهتر است؛ چون ماده ای با σ_y کمتر میفرستد.

مسالہ کیا سارہ fail کہیں؟ (فرض مادہ نرم)



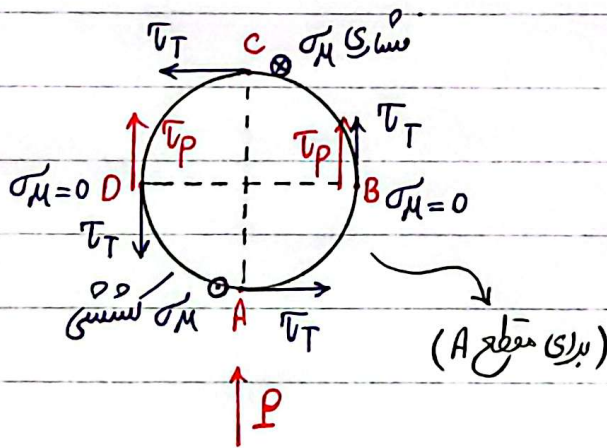
$$SF = 2 \quad \sigma_y = 320 \text{ MPa}$$

C: تنش برشی ناشی از نیروی برشی P

D: تنش برشی ناشی از نیروی برشی P
تنش محوری ناشی از همان خمشی ناشی از P

E: تنش برشی ناشی از نیروی برشی P
تنش برشی ناشی از گساره بعیثی ناشی از P

A: تنش برشی ناشی از نیروی برشی P
تنش برشی ناشی از گساره بعیثی ناشی از P
تنش محوری ناشی از همان خمشی ناشی از P



$$\text{در نقطه A: } \sigma = \frac{M_C}{I} = \frac{210 (0.015)}{\pi/4 (0.015)^4} = 79.26 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_p = 0$$

$$\tau_T = \frac{T_r}{J} = \frac{270 (0.015)}{\pi/2 (0.015)^4} = 50.9 \text{ MPa}$$

باید برای همه نقاط چک شود!

$$\tau_{\max} = R = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{79.26}{2} \right)^2 + (50.9)^2 \right]^{1/2} = 64.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{allowable}} = 320/2 = 160 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{allowable}} = 160/2 = 80$$

2 = S.F چون

fail نمیکنند! $64.5 < 80$